1989 年京大後期理 $\boxed{6}$

(1)

$$f_2(x)=\frac{a\dfrac{ax}{x+1}}{\dfrac{ax}{x+1}+1}=\frac{a^2x}{(a+1)x+1}\qquad f_3(x)=\frac{a\dfrac{a^2x}{(a+1)x+1}}{\dfrac{a^2x}{(a+1)x+1}+1}=\frac{a^3x}{(a^2+a+1)x+1}$$

$f_n(x)=\dfrac{a^nx}{(a^{n-1}+\cdots+a+1)x+1}$ と予想できる。 $n=1,\ 2,\ 3$ のとき成立。

$n=k$ のとき　$f_k(x)=\dfrac{a^kx}{(a^{k-1}+\cdots+a+1)x+1}$ とすると

$$f_{k+1}(x)=\frac{a\dfrac{a^kx}{(a^{k-1}+\cdots+a+1)x+1}}{\dfrac{a^kx}{(a^{k-1}+\cdots+a+1)x+1}+1}=\frac{a^{k+1}x}{(a^k+\cdots+a+1)x+1}$$

したがって、$n=k+1$ でも成立。

ここで、$0<a<1$ のとき $a^{n-1}+\cdots+a+1=\dfrac{1-a^n}{1-a}$ 、$a=1$ のとき $a^{n-1}+\cdots+a+1=n$ であるから

$0<a<1$ のとき $f_n(x)=\dfrac{a^n(1-a)x}{(1-a^n)x+1-a}$ 、$a=1$ のとき $f_n(x)=\dfrac{x}{nx+1}$ ……(答)

(2)

例えば、$0<a<1$ のとき $b_n=\dfrac{1}{a^n}$ 、$a=1$ のとき $b_n=n$ とすると

$0<a<1$ のとき　$b_n\cdot f_n(c)=\dfrac{(1-a)c}{(1-a^n)c+1-a}$　$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n\cdot f_n(c)=\dfrac{(1-a)c}{c+1-a}>0$

$a=1$ のとき　$b_n\cdot f_n(c)=\dfrac{nc}{nc+1}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{nc}}$　$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n\cdot f_n(c)=1$

確かに正の数に収束するので　$0<a<1$ のとき $b_n=\dfrac{1}{a^n}$ 、$a=1$ のとき $b_n=n$ ……(答)