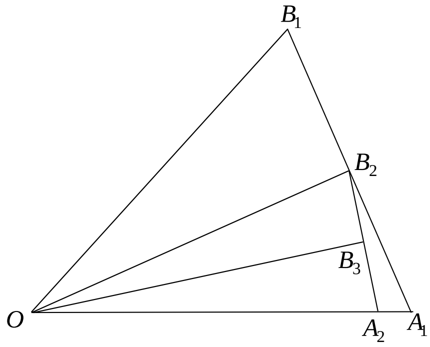
1989 年京大理 $\boxed{1}$



$\angle A_nOB_n = \dfrac{\theta}{2^{n-1}}$, $a_n = a_{n-1}\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}$ であるから

(1)

$a_2 = a_1\cos\dfrac{\theta}{2} = \cos\dfrac{\theta}{2}$　　$a_3 = a_2\cos\dfrac{\theta}{4} = \cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4}$

$a_3\sin\dfrac{\theta}{4} = \cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{4}\sin\dfrac{\theta}{4} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{4}\sin\theta$ ……(答)

(2)

$a_n = \dfrac{\sin\theta}{2^{n-1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。

$n=1,\ 2,\ 3$ のとき成立。 $n=k$ のとき、 $a_k = \dfrac{\sin\theta}{2^{k-1}\sin\dfrac{\theta}{2^{k-1}}}$ と仮定すると

$$a_{k+1} = a_k\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^{k-1}\sin\frac{\theta}{2^{k-1}}}\cdot\cos\frac{\theta}{2^k} == \frac{\sin\theta}{2^k\sin\frac{\theta}{2^k}\cos\frac{\theta}{2^k}}\cdot\cos\frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin\theta}{2^k\sin\frac{\theta}{2^k}}$$

したがって、 $n=k+1$ でも成立し、 $a_n = \dfrac{\sin\theta}{2^{n-1}\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}$ が示された。

$a_n = \dfrac{\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ であり、 $n\to\infty$ のとき、 $\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\to 0$ 、 $\dfrac{\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}{\sin\dfrac{\theta}{2^{n-1}}}\to 1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\sin\theta}{\theta}$ ……(答)