1990 年京大文 $\boxed{1}$

(1)

P の x 座標を t とすると

$t^3-t=t^2-a$ ——① $3t^2-1=2t$ ——②

②より $3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)=0$ $\therefore t=-\dfrac{1}{3},\ 1$

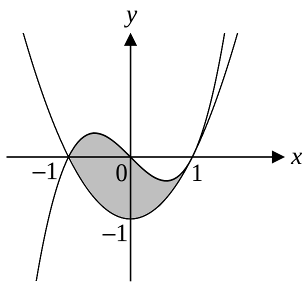
①より $a=-t^3+t^2+t$ $t=-\dfrac{1}{3}$ のとき $a=\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{5}{27}$ $t=1$ のとき $a=1+1-1=1$

$a>0$ より、適するのは $\therefore a=1$ ……(答)

(2)

$x^3-x=x^2-1$ とすると $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)=0$

求める面積は



$$\int_{-1}^{1}\left\{(x^3-x)-(x^2-1)\right\}dx=\int_{-1}^{1}(x-1)^2(x+1)dx$$

$$=\frac{(1+1)^4}{12}=\frac{2^4}{12}=\frac{4}{3}$$ ……(答)

※理系 $\boxed{1}$ は、a の符号を限定しておらず、小問がない。

(注)

$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$ を用いた。導出は以下の通り。

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^2\left\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\right\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$