1990 年京大後期理（理学部以外）$\boxed{2}$

$$f(x)=\frac{a-\cos x}{x^2} \qquad f'(x)=\frac{x^2\sin x-2x(a-\cos x)}{x^4}=\frac{x\sin x+2\cos x-2a}{x^3}$$

$g(x)=x\sin x+2\cos x-2a$ とすると、$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $g(x)\geqq 0$ であればよい。

$$g'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x=x\cos x-\sin x$$

$$g''(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$$

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $g''(x)<0$ であるから、$g'(x)$ は単調減少。

$g'(x)=0$ より $g'(x)<0$ であるから、$g(x)$ は単調減少。

$0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において $g(x)\geqq 0$ となる条件は　$g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-2a\geqq 0$　$\therefore a\leqq\dfrac{\pi}{4}$

求める a の最大値は　$\therefore a=\dfrac{\pi}{4}$　……（答）

1990年京大後期理(理学部) $\boxed{2}$　※2019. 5. 29 訂正

(1)

k を整数として　$f(n+k)=\left|\sin\dfrac{2\pi(n+k)}{n}\right|=\left|\sin\left(2\pi+\dfrac{2\pi k}{n}\right)\right|=\left|\sin\dfrac{2\pi k}{n}\right|=f(k)$

これより、$k=0,1,\cdots,n-1$ とすれば、$f(k)$ はとり得るすべての値をとる。

$k=n-i\left(i=1,2,\cdots,\dfrac{n-1}{2}\right)$ のとき　$f(n-i)=\left|\sin\dfrac{2\pi(n-i)}{n}\right|=\left|\sin\left(2\pi-\dfrac{2\pi i}{n}\right)\right|=\left|-\sin\dfrac{2\pi i}{n}\right|=\left|\sin\dfrac{2\pi i}{n}\right|=f(i)$

したがって、$k=0,1,\cdots,\dfrac{n-1}{2}$ について調べれば十分である。

このとき $0\leqq\dfrac{2\pi k}{n}\leqq\pi\left(1-\dfrac{1}{n}\right)<\pi$ であるから $\sin\dfrac{2\pi k}{n}\geqq0$ で、$f(k)=\sin\dfrac{2\pi k}{n}$ である。

$0\leqq i\leqq j\leqq\dfrac{n-1}{2}$ のとき　$f(j)-f(i)=\sin\dfrac{2\pi j}{n}-\sin\dfrac{2\pi i}{n}=2\cos\dfrac{\pi(j+i)}{n}\sin\dfrac{\pi(j-i)}{n}$

n は奇数であるから、$\cos\dfrac{\pi(j+i)}{n}\neq0$ である。$0\leqq j-i\leqq\dfrac{n-1}{2}$ であるから、$\sin\dfrac{\pi(j-i)}{n}=0$ となるとき $j=i$。

すなわち、$f(j)=f(i)$ のとき $j=i$ であるから、$f(0),\ f(1),\cdots,\ f\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$ の中に重複する値はない。

したがって、集合 $\{f(k)\,|\,k\text{は整数}\}$ の要素は、$\dfrac{n+1}{2}$ 個　……(答)

(2)

集合 $\left\{f(k)\,\middle|\,k\text{は}0\leqq k\leqq\dfrac{n-1}{2}\text{なる整数}\right\}$ と $\left\{f(mk)\,\middle|\,k\text{は}0\leqq k\leqq\dfrac{n-1}{2}\text{なる整数}\right\}$ が、一致することを示せばよい。

m は n と素な整数であるから、$mk\left(0\leqq k\leqq\dfrac{n-1}{2}\right)$ を n で割った余りは、$k=0$ のとき 0、$k\neq0$ のとき $1,2,\cdots,n-1$ のいずれかである。

$0\leqq i<j\leqq\dfrac{n-1}{2}$ とする。$f(mi)$ と $f(mj)$ が一致するとき、

ｉ) mi と mj を n で割った余りが一致する　ｉｉ) mi と mj を n で割った余りの和が n になる

のいずれかが成立する。

ｉ)が成立するとき　$mi=np+r,\ mj=nq+r$ とする。辺々引くと　$m(j-i)=n(q-p)$

m と n は互いに素であるから、$j-i$ が n の倍数でなければならないが、$1\leqq j-i\leqq\dfrac{n-1}{2}$ であるから不適。

ｉｉ)が成立するとき　$mi=np+r,\ mj=nq+n-r$ とする。辺々足すと　$m(j+i)=n(q+p+1)$

m と n は互いに素であるから、$j+i$ が n の倍数でなければならないが、$1\leqq j+i<n-1$ であるから不適。

以上により、ｉ)とｉｉ)は成立しない。集合 $\left\{f(mk)\,\middle|\,k\text{は}0\leqq k\leqq\dfrac{n-1}{2}\text{なる整数}\right\}$ は $\dfrac{n+1}{2}$ 個の相違なる値をとり、

それらは $f(0),\ f(1),\cdots,\ f\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$ に一致するから、題意は示された。(証明終)