1990年京大後期理（理学部以外）$\boxed{3}$

（1）

$P(s,\ \log s)$ における接線は　$y=\dfrac{1}{s}(x-s)+\log s=\dfrac{1}{s}x-1+\log s$　これより、$Q(0,\ \log s-1)$ である。

$\overset{\frown}{AP}=\displaystyle\int_1^s\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$、$\overline{PQ}=\sqrt{s^2+1}$ より　$t=\sqrt{s^2+1}-\displaystyle\int_1^s\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

$$\frac{dt}{ds}=\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}-\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}=\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}-\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}=\frac{s^2-(s^2+1)}{s\sqrt{s^2+1}}=-\frac{1}{s\sqrt{s^2+1}}\quad\cdots\cdots(答)$$

（2）

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{s^2}\cdot(-s\sqrt{s^2+1})=\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}=\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}=\sqrt{1+u^2}\quad\cdots\cdots(答)$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dt}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\sqrt{1+u^2}=u\quad\cdots\cdots(答)$$

（3）

（2）より、$\dfrac{du}{dt}=v,\ \dfrac{dv}{dt}=u$ であるから、辺々足すと

$$\frac{d(u+v)}{dt}=u+v\qquad\frac{1}{u+v}d(u+v)=dt\qquad\log|u+v|=t+C\qquad u+v=\pm e^{t+C}$$

$\pm e^C$ を C で置き換えて　$u+v=Ce^t$　$\therefore u+\sqrt{1+u^2}=Ce^t$

$s=1$ のとき、$u=1,\ t=\sqrt{2}$ であるから　$1+\sqrt{2}=Ce^{\sqrt{2}}$　$\therefore C=(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$

$$\sqrt{1+u^2}=Ce^t-u\qquad 1+u^2=C^2e^{2t}-2Cue^t+u^2\qquad 2Cue^t=C^2e^{2t}-1$$

$$\therefore u=\frac{1}{2}\left(Ce^t-\frac{1}{Ce^t}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{2(1+\sqrt{2})e^{t-\sqrt{2}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{t-\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{-t+\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots(答)$$

1990 年京大後期理(理学部) $\boxed{3}$

(1)

$P(s,\ \log s)$ における接線は　$y=\dfrac{1}{s}(x-s)+\log s=\dfrac{1}{s}x-1+\log s$　これより、$Q(0,\ \log s-1)$ である。

$\overset{\frown}{AP}=\displaystyle\int_1^s\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$、$\overline{PQ}=\sqrt{s^2+1}$ より　$t=\sqrt{s^2+1}-\displaystyle\int_1^s\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

$$\frac{dt}{ds}=\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}-\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}=\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}-\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}=\frac{s^2-(s^2+1)}{s\sqrt{s^2+1}}=-\frac{1}{s\sqrt{s^2+1}}\quad\cdots\cdots(答)$$

$s\geqq 1$であるから、$\dfrac{dt}{ds}<0$ であり、t は s の減少関数である。(証明終)

(2)

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{s^2}\cdot(-s\sqrt{s^2+1})=\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}=\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}=\sqrt{1+u^2}\quad\cdots\cdots(答)$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{du}\cdot\frac{du}{dt}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\sqrt{1+u^2}=u\quad\cdots\cdots(答)$$

(3)

(2) より、$\dfrac{du}{dt}=v,\ \dfrac{dv}{dt}=u$ であるから、辺々足すと

$$\frac{d(u+v)}{dt}=u+v\qquad\frac{1}{u+v}d(u+v)=dt\qquad\log|u+v|=t+C\qquad u+v=\pm e^{t+C}$$

$\pm e^C$ を C で置き換えて　$u+v=Ce^t$　$\therefore u+\sqrt{1+u^2}=Ce^t$

$s=1$のとき、$u=1,\ t=\sqrt{2}$ であるから　$1+\sqrt{2}=Ce^{\sqrt{2}}$　$\therefore C=(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$

$$\sqrt{1+u^2}=Ce^t-u\qquad 1+u^2=C^2e^{2t}-2Cue^t+u^2\qquad 2Cue^t=C^2e^{2t}-1$$

$$\therefore u=\frac{1}{2}\left(Ce^t-\frac{1}{Ce^t}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{t-\sqrt{2}}-\frac{1}{2(1+\sqrt{2})e^{t-\sqrt{2}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{t-\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}e^{-t+\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots(答)$$

$s\to\infty$ のとき、$u\to 0$ であるから、$u=0$ とすると

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2}e^{t-\sqrt{2}}=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}e^{-t+\sqrt{2}}\qquad e^{2(t-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2\qquad e^{t-\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$

$$t-\sqrt{2}=\log(\sqrt{2}-1)\qquad t=\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}-1)=\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})$$

したがって　$\therefore t_0=\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})$　$\cdots\cdots$(答)