1990 年京大後期理 $\boxed{6}$

(1)

X_i は当たったとき 1、外れたとき 0 であるから、結局　$\therefore X=\sum_{i=1}^{l} X_i$　……(答)

(2)

(解答 1)　二項係数による処理

l 回中 X 回当たる確率 $P(X)$ は　$P(X)={}_lC_X\left(\frac{1}{n}\right)^X\left(\frac{n-1}{n}\right)^{l-X}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^l {}_lC_X\left(\frac{1}{n-1}\right)^X$

$$E(X^2)=\left(\frac{n-1}{n}\right)^l\sum_{X=1}^{l}X^2{}_lC_X\left(\frac{1}{n-1}\right)^X$$

ここで、$l\geqq 2,\ X\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
X^2{}_lC_X\left(\frac{1}{n-1}\right)^X&=X^2\frac{l!}{X!(l-X)!}\left(\frac{1}{n-1}\right)^X=\{(X-1)+1\}\frac{l!}{(X-1)!(l-X)!}\left(\frac{1}{n-1}\right)^X\\
&=\frac{l!}{(X-2)!(l-X)!}\left(\frac{1}{n-1}\right)^X+\frac{l!}{(X-1)!(l-X)!}\left(\frac{1}{n-1}\right)^X\\
&=l(l-1)\cdot\frac{(l-2)!}{(X-2)!(l-X)!}\left(\frac{1}{n-1}\right)^X+l\cdot\frac{(l-1)!}{(X-1)!(l-X)!}\left(\frac{1}{n-1}\right)^X\\
&=\frac{l(l-1)}{(n-1)^2}{}_{l-2}C_{X-2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{X-2}+\frac{l}{n-1}{}_{l-1}C_{X-1}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{X-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{X=1}^{l}X^2{}_lC_X\left(\frac{1}{n-1}\right)^X&=\frac{l}{n-1}+\frac{l(l-1)}{(n-1)^2}\sum_{X=2}^{l}{}_{l-2}C_{X-2}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{X-2}+\frac{l}{n-1}\sum_{X=2}^{l}{}_{l-1}C_{X-1}\left(\frac{1}{n-1}\right)^{X-1}\\
&=\frac{l}{n-1}+\frac{l(l-1)}{(n-1)^2}\sum_{x=0}^{l-2}{}_{l-2}C_x\left(\frac{1}{n-1}\right)^x+\frac{l}{n-1}\sum_{x=1}^{l-1}{}_{l-1}C_x\left(\frac{1}{n-1}\right)^x\\
&=\frac{l}{n-1}+\frac{l(l-1)}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{l-2}+\frac{l}{n-1}\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{l-1}-1\right\}\\
&=\frac{l(l-1)}{(n-1)^2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{l-2}+\frac{l}{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{l-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^l\left\{\frac{l(l-1)}{n^2}+\frac{l}{n}\right\}
\end{aligned}$$

したがって　$\therefore E(X^2)=\frac{l(l-1)}{n^2}+\frac{l}{n}$　……(答)　$l=1$ においても成立。

(解答 2)　期待値の和、確率変数の独立性に着目

$l\geqq 2$ のとき、$X^2=\left(\sum_{i=1}^{l}X_i\right)^2=\sum_{i=1}^{l}{X_i}^2+2(\underbrace{X_1X_2+X_1X_3+\cdots+X_{l-1}X_l}_{{}_lC_2\text{個の積の和}})$ であるから

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{l}E({X_i}^2)+2\{E(X_1X_2)+E(X_1X_3)+\cdots+E(X_{l-1}X_l)\}$$

確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_l$ は、すべて独立であるから、相違なる $i,\ j$ について　$E(X_iX_j)=E(X_i)E(X_j)$

確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_l$ は、当たりが出たとき 1、当たりが出ないとき 0 をとる。

$1\leqq i\leqq l$ について　$\therefore E(X_i)=E(X_i{}^2)=1\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n}$

相違なる $i,\ j$ について　$\therefore E(X_iX_j)=E(X_i)E(X_j)=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n^2}$

求める期待値は

$\therefore E(X^2)=l\cdot\dfrac{1}{n}+2\cdot{}_lC_2\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{l}{n}+2\cdot\dfrac{l(l-1)}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{l(l-1)}{n^2}+\dfrac{l}{n}$ ……(答)　$l=1$ においても成立。

(3)

$l\geqq1$ において、$E(X^2)$ は単調増加である。

$l=n$ のとき　$E(X^2)=\dfrac{n-1}{n}+1=2-\dfrac{1}{n}<2$　$l=n+1$ のとき　$E(X^2)=\dfrac{n+1}{n}+\dfrac{n+1}{n}=2+\dfrac{2}{n}>2$

したがって、$E(X^2)>2$ となる最小の l は　$\therefore l=n+1$ ……(答)

(注 1)

わざわざ小問(1)を入れていることから、出題者が意図した小問(2)の解答は、(解答 2)と思われる。

(注 2)

$E(X^2)=\{E(X)\}^2$ ではない。$E(X)$ を求めると、$E(X)=\dfrac{l}{n}$ であるから、$\{E(X)\}^2=\dfrac{l^2}{n^2}$ となる。