1990年京大後期理$\boxed{5}$文$\boxed{5}$共通

(1)
1次変換 f は逆変換を持つから、ある点 A と、その f による像 $f(A)$ は、一対一に対応している。
すなわち、異なる点の f による像が一致することはなく、 f^{-1} についても同じことが言える。
今、 f は C を C' に移すから、C 上の点と C' 上の点は一対一に対応している。
C 上にない点が C' 上の点に移ることはなく、C 上の点が C' 上にない点に移ることはない。

l と C の接点 P の f による像 $f(P)$ は、l' 上かつ C' 上の点であるから、l' と C' は必ず共有点を持つ。
l' と C' が2つの共有点を持つと仮定する。
l と C の共有点は P しかないから、l' と C' の2つの共有点のうち、1つは C 上にない点の f による像である。
これは、C 上の点と C' 上の点が一対一に対応していることに矛盾する。

したがって、l' は $f(P)$ における C' の接線でなければならない。（証明終）

(2)
C 上の2点 P_1, P_2 について、線分 P_1P_2 が C の直径であるとき、C の中心 A は、P_1, P_2 の中点である。
$\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})$ と表せるので　$f(\overrightarrow{OA})=f\left(\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})\right)=\dfrac{1}{2}\left\{f(\overrightarrow{OP_1})+f(\overrightarrow{OP_2})\right\}$
A の f による像 $f(A)$ は、P_1 の f による像 $f(P_1)$ と、P_2 の f による像 $f(P_2)$ の中点である。

ここで、C の直径の両端になるような2点 P_1, P_2 は、無限に存在する。
一方、A の f による像 $f(A)$ は、ただ1つに定まるから、いずれの C の直径の両端になるような2点 P_1, P_2 についても、 $f(P_1)$ と $f(P_2)$ の中点は、一致しなければならない。
結局、 $f(P_1), f(P_2)$ は C' の直径の両端であり、その中点は C' の中心である。
したがって、A の f による像 $f(A)$ は、C' の中心である。（証明終）