1990 年京大理 $\boxed{1}$

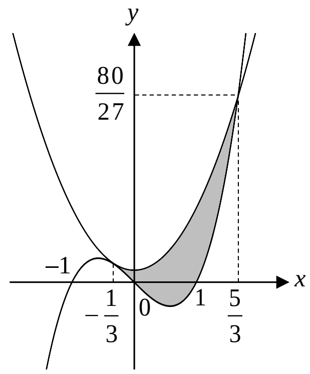
P の x 座標を t とすると

$t^3-t=t^2-a$ ――① $3t^2-1=2t$ ――②

②より $3t^2-2t-1=(3t+1)(t-1)=0$ $\therefore t=-\dfrac{1}{3},\ 1$

①より $a=-t^3+t^2+t$ $t=-\dfrac{1}{3}$ のとき $a=\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{5}{27}$ $t=1$ のとき $a=1+1-1=1$

$a=-\dfrac{5}{27}$ のとき



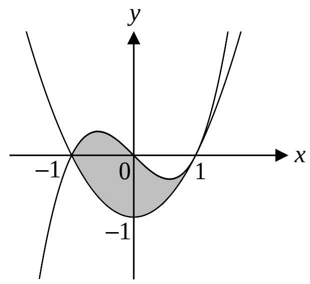
$x^3-x=x^2+\dfrac{5}{27}$ とすると $x^3-x^2-x-\dfrac{5}{27}=\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2\left(x-\dfrac{5}{3}\right)=0$

求める面積は

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{\left(x^2+\frac{5}{27}\right)-(x^3-x)\right\}dx=-\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\left(x-\frac{5}{3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\right)^4=\frac{2^4}{12}=\frac{4}{3}$$

$a=1$ のとき



$x^3-x=x^2-1$ とすると $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)=0$

求める面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{(x^3-x)-(x^2-1)\right\}dx=\int_{-1}^{1}(x-1)^2(x+1)dx$$

$$=\frac{(1+1)^4}{12}=\frac{2^4}{12}=\frac{4}{3}$$

したがって、いずれにしても、求める面積は $\therefore \dfrac{4}{3}$ ……(答)

(注)

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)dx=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$ を用いた。導出は以下の通り。

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2\left\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\right\}dx=\int_\alpha^\beta\left\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(\beta-\alpha)\cdot\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta=\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{3}=-\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}$$