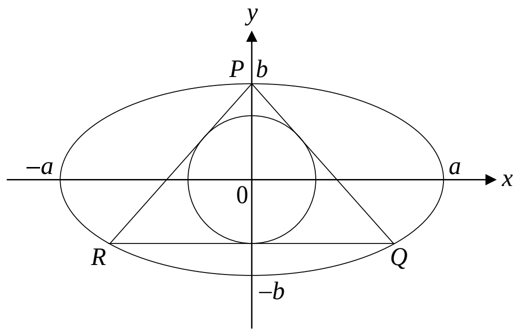
1990 年京大理 $\boxed{6}$

PQ と PR は、y 軸に関して対称であるから、Q と R の y 座標は一致する。
すなわち、QR は x 軸と平行であるから、Q と R の y 座標は -1 でなければならない。
Q の x 座標を正として、Q の座標を求める。

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{1}{b^2}=\frac{b^2-1}{b^2} \qquad x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-1) \qquad \therefore x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-1}$$



PQ の傾きは $\quad -\dfrac{b+1}{\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-1}}=-\dfrac{b(b+1)}{a\sqrt{b^2-1}}$

直線 PQ の式は

$$y=-\frac{b(b+1)}{a\sqrt{b^2-1}}x+b \qquad b(b+1)x+a\sqrt{b^2-1}y-ab\sqrt{b^2-1}=0$$

これが円 C に接するとき、原点との距離が1であるから

$$\frac{\left|-ab\sqrt{b^2-1}\right|}{\sqrt{b^2(b+1)^2+a^2(b^2-1)}}=1 \qquad a^2b^2(b^2-1)=b^2(b+1)^2+a^2(b^2-1)$$

$$a^2\left\{b^2(b^2-1)-(b^2-1)\right\}=a^2(b^2-1)^2=a^2(b+1)^2(b-1)^2=b^2(b+1)^2 \qquad a^2=\frac{b^2}{(b-1)^2}$$

$$\therefore a=\frac{b}{b-1}\ (b>1)\ \cdots\cdots(答)$$