1990年京大理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

余弦定理により

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos 60° = c^2 + a^2 - ca = (c-a)^2 + ca$

$ca = b^2 - (c-a)^2 = (b+c-a)(b-c+a)$

ここで、$c,\ a$は素数であり、三角形の成立条件より$b+c-a>0,\ b-c+a>0$であるから

ｉ) $c = b+c-a,\ a = b-c+a$　ｉｉ) $c = b-c+a,\ a = b+c-a$

ｉｉｉ) $ca = b+c-a,\ 1 = b-c+a$　ｉｖ) $ca = b-c+a,\ 1 = b+c-a$

のいずれかである。

ｉ)のとき　$b-a=0,\ b-c=0$　$\therefore a=b=c$

ｉｉ)のとき

$2c = b+a,\ 2a = b+c$　辺々引くと　$2(c-a) = a-c$　$c-a=0$　$\therefore a=c$

したがって　$2a = b+a$　$\therefore a=b$　$\therefore a=b=c$

ｉｉｉ)のとき

辺々引くと　$ca-1 = 2c-2a$　$ca-2c+2a=1$　$(c+2)(a-2) = -3$

$c+2>0,\ a-2 \geqq 0$であるから、不適。

ｉｖ)のとき

辺々引くと　$ca-1 = -2c+2a$　$ca+2c-2a=1$　$(c-2)(a+2) = -3$

$c-2 \geqq 0,\ a+2>0$であるから、不適。

以上により、$a=b=c$しかあり得ないから、三角形ABCは正三角形である。(証明終)