1990 年京大理 $\boxed{3}$ 文 $\boxed{3}$ 共通

(1)

$\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ とすると　$f(\vec{u})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au_1+bu_2\\cu_1+du_2\end{pmatrix}$　$g(\vec{v})=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}av_1+cv_2\\bv_1+dv_2\end{pmatrix}$

$f(\vec{u})\cdot\vec{v}=au_1v_1+bu_2v_1+cu_1v_2+du_2v_2$　$\vec{u}\cdot g(\vec{v})=au_1v_1+cu_1v_2+bu_2v_1+du_2v_2$

$\therefore f(\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot g(\vec{v})$　（証明終）

(2)

(1) で示した関係は、$\vec{u}=\vec{v}$ でも成り立つので　$f(\vec{u})\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot g(\vec{u})$　$\therefore\left\{f(\vec{u})-g(\vec{u})\right\}\cdot\vec{u}=0$

$\vec{u}=\overrightarrow{OP}$ とすると、$\overrightarrow{OP}\neq\vec{0}$ であり、$f(\vec{u})=\overrightarrow{OQ},\ g(\vec{u})=\overrightarrow{OR}$ であるから　$\therefore\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{OP}=0$ ——①

①が成り立つ条件は、$\overrightarrow{QR}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{OP}$ であるから

$\overrightarrow{QR}=\vec{0}$ のとき　$\therefore Q=R$

$\overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{OP}$ のとき　f は、原点を通る直線 l 上の点 P を、直線 l 上の点 Q に移すので、$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OQ}$ と書ける。

$k\neq0$ であるから　$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$　$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$　$\therefore\overrightarrow{QR}\perp\overrightarrow{OQ}$

したがって、3 点 $Q,\ R,\ O$ は、Q を直角とする直角三角形の頂点となる。

以上により示された。（証明終）