1991年京大後期文$\boxed{3}$

P における C の接線の傾きは　$m=3p^2+6p=3p(p+2)$

$p=-2,\ 0$ のとき $m=0$ であり、直交する直線は y 軸と平行であるが、そのような C の接線は存在しない。

$p\neq -2,\ 0$ として、傾きが $-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{1}{3p^2+6p}$ であるような、C の接線が存在すればよい。

Q の x 座標を t とすると、P における C の接線の傾きは、$3t^2+6t$ であるから

$$3t^2+6t=-\frac{1}{m} \quad 3mt^2+6mt+1=0$$

これが実数解を持つので　$D/4=9m^2-3m=3m(3m-1)\geqq 0$　$\therefore m<0,\ \dfrac{1}{3}\leqq m$

$m<0$ のとき　$3p(p+2)<0$　$\therefore -2<p<0$

$\dfrac{1}{3}\leqq m$ のとき　$3p^2+6p\geqq \dfrac{1}{3}$

$$9p^2+18-1=9\left(p-\frac{-3-\sqrt{10}}{3}\right)\left(p-\frac{-3+\sqrt{10}}{3}\right)\geqq 0 \quad \therefore p\leqq \frac{-3-\sqrt{10}}{3},\ \frac{-3+\sqrt{10}}{3}\leqq p$$

$\dfrac{-3-\sqrt{10}}{3}<\dfrac{-3-3}{3}=-2,\ 0=\dfrac{-3+3}{3}<\dfrac{-3+\sqrt{10}}{3}$ であるから、求める範囲は

$$\therefore p\leqq \frac{-3-\sqrt{10}}{3},\ -2<p<0,\ \frac{-3+\sqrt{10}}{3}\leqq p \quad \cdots\cdots(\text{答})$$