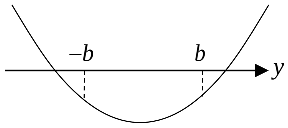
1991 年京大文 $\boxed{2}$

(1)

H_+ と H_- は x 軸に関して対称であり、$H_+,\ H_-,\ C$ はそれぞれ y 軸に関して対称である。
H_+ と C が相違なる 2 点を共有するとき、その 2 点は y 軸に関して対称である。H_- と C についても同様。

$y^2-x^2=b^2$ より、$x^2=y^2-b^2=(y+b)(y-b)\geqq 0$ であるから　$y\leqq -b,\ b\leqq y$
C の式に代入すると　$y^2-b^2+(y-a)^2=2y^2-2ay+a^2-b^2=1$　$2y^2-2ay+a^2-b^2-1=0$ ――①
$y=\pm b$ のとき、$x=0$ のみ。$|y|>b$ であれば、1 つの y に対して、x が 2 つ決まる。
①が、$y<-b$ および $b<y$ に、それぞれ 1 つの解を持つ条件を考える。



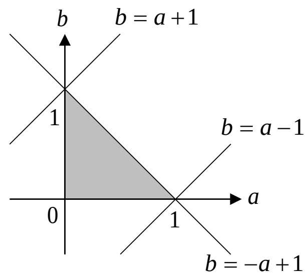
$f(y)=2y^2-2ay+a^2-b^2-1$ としたとき、上に凸であるから、
$f(-b)<0,\ f(b)<0$ であればよい。

$f(-b)=2b^2+2ab+a^2-b^2-1=a^2+2ab+b^2-1=(a+b)^2-1<0$

$-1<a+b<1$　$\therefore -a-1<b<-a+1$ ――②

$f(b)=2b^2-2ab+a^2-b^2-1=a^2-2ab+b^2-1=(a-b)^2-1<0$

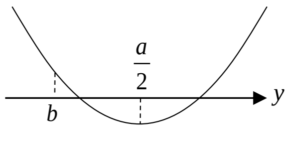
$-1<a-b<1$　$\therefore a-1<b<a+1$ ――③



②、③および、$a>0$ かつ $b>0$ の共通範囲を図示すると、右図の通り。
境界線を含まない。

(2)

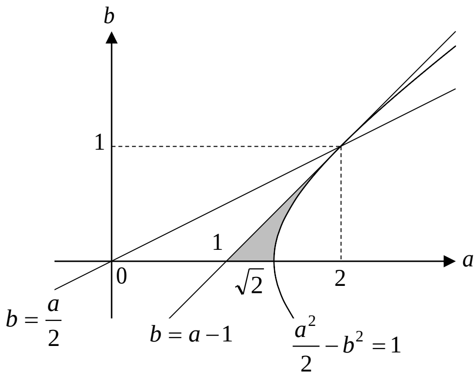
①が、$b<y$ に、相違なる 2 つの解を持つ条件を考える。



$f(b)=(a-b)^2-1>0$　$a-b<-1,\ 1<a-b$　$\therefore a+1<b,\ b<a-1$ ――④

軸について　$\therefore b<\dfrac{a}{2}$ ――⑤

$D/4=a^2-2(a^2-b^2-1)=-a^2+2b^2+2>0$　$\therefore \dfrac{a^2}{2}-b^2<1$ ――⑥



④～⑥および、$a>0$ かつ $b>0$ の共通範囲を図示すると、
右図の通り。境界線を含まない。

$b=a-1$ は、点 $(2,\ 1)$ における、$\dfrac{a^2}{2}-b^2=1$ の接線である。

この範囲の $a,\ b$ をとれば、C が H_+ と相違なる 4 点を共有する。

(注)

(1) は、$H_+,\ H_-,\ C$ のグラフの概形から求めた方が簡単。
$b<a+1,\ a-1<-b$ であるから　$\therefore b<a+1,\ b<-a+1$