

1991 年京大文 [5]

(1)

赤玉の個数が増えることはない。 $n+1$ 回目の試行を行う前、袋に i 個の赤玉があるには

- i) n 回目の試行を行う前、袋に i 個の赤玉があり、かつ n 回目の試行で白玉を取り出す。
 - ii) n 回目の試行を行う前、袋に $i+1$ 個の赤玉があり、かつ n 回目の試行で赤玉を取り出す。
- のいずれかである。

n 回目の試行を行う前、袋に 1 個の赤玉がある確率を q'_n 、2 個の赤玉がある確率を q''_n とすると

$$q'_{n+1} = \frac{2}{N+2} q''_n + \frac{N+1}{N+2} q'_n \quad q''_{n+1} = \frac{N}{N+2} q''_n$$

$$P'_n = \frac{1}{N+2} q'_n, P''_n = \frac{2}{N+2} q''_n \text{ であるから } \therefore q'_n = (N+2)P'_n, q''_n = \frac{N+2}{2} P''_n \quad \text{これより}$$

$$(N+2)P'_{n+1} = \frac{2}{N+2} \cdot \frac{N+2}{2} P''_n + \frac{N+1}{N+2} \cdot (N+2)P'_n = P''_n + (N+1)P'_n$$

$$\frac{N+2}{2} P''_{n+1} = \frac{N}{N+2} \cdot \frac{N+2}{2} P''_n = \frac{N}{2} P''_n$$

以上により
$$\begin{cases} P'_{n+1} = \frac{1}{N+2} P''_n + \frac{N+1}{N+2} P'_n \\ P''_{n+1} = \frac{N}{N+2} P''_n \end{cases} \dots\dots (\text{答})$$

(2)

(1) で求めた漸化式を、辺々足すと

$$P'_{n+1} + P''_{n+1} = \frac{N+1}{N+2} (P'_n + P''_n) \quad \therefore P_{n+1} = \frac{N+1}{N+2} P_n \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$P_1 = \frac{2}{N+2} \text{ であるから } \therefore P_n = \frac{2}{N+2} \left(\frac{N+1}{N+2} \right)^{n-1} \quad \dots\dots (\text{答})$$

※理系 [5] とほぼ同一問題。理系 [5] は、白玉 N 個、赤玉 3 個から始まっている。