1991年京大後期理 $\boxed{3}$

$\vec{b}=(1,\ 0,\ 0),\ \vec{c}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$ としても一般性を失わない。$\vec{a}=(p,\ q,\ r)$ とすると

$p^2+q^2+r^2=1$ ——① $\vec{a}\cdot\vec{b}=p=\cos\gamma$ ——② $\vec{c}\cdot\vec{a}=p\cos\alpha+q\sin\alpha=\cos\beta$ ——③

①、②、③より

$$\begin{aligned}&\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\&=\cos^2\alpha+(p\cos\alpha+q\sin\alpha)^2+p^2-2\cos\alpha(p\cos\alpha+q\sin\alpha)p\\&=\cos^2\alpha+p^2\cos^2\alpha+2pq\cos\alpha\sin\alpha+q^2\sin^2\alpha+p^2-2p^2\cos^2\alpha-2pq\cos\alpha\sin\alpha\\&=(1-p^2)\cos^2\alpha+q^2\sin^2\alpha+p^2=(1-p^2)(1-\sin^2\alpha)+q^2\sin^2\alpha+p^2\\&=1-p^2-(1-p^2-q^2)\sin^2\alpha+p^2=1-r^2\sin^2\alpha\end{aligned}$$

$0\leqq r^2\leqq 1,\ 0\leqq\sin^2\alpha\leqq 1$ より、$0\leqq r^2\sin^2\alpha\leqq 1$ であるから

$\therefore 0\leqq\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqq 1$ （証明終）

次に、等号成立条件を考える。

左側の等号が成立するとき　$r^2\sin^2\alpha=1$　$r^2=1$ かつ $\sin^2\alpha=1$ であるから

①より　$p=q=0$　②、③より　$\therefore\cos\gamma=0,\ \cos\beta=0$　$\sin^2\alpha=1$ より　$\therefore\cos\alpha=0$

このとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ 、$\vec{b}$ と $\vec{c}$ 、$\vec{c}$ と $\vec{a}$ は、いずれも直交している。

$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=0$ であるから、確かに等号が成立。

右側の等号が成立するとき　$r^2\sin^2\alpha=0$　$r=0$ または $\sin\alpha=0$ であるから

$\sin\alpha=0$ のとき　$\cos\alpha=\pm1$、$\vec{c}=(\pm1,\ 0,\ 0)$ であるから、$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は一致するか、互いに逆向きである。

$r=0$ のとき　①、②より　$q^2=1-p^2=1-\cos^2\gamma=\sin^2\gamma$　$q=\pm\sin\gamma$　$\therefore\vec{a}=(\cos\gamma,\ \pm\sin\gamma,\ 0)$

対称性より、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が、いずれも同一平面上に存在すればよい。

以上まとめると、

左側の等号は、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ のうちどの2つも直交しているとき成立。

右側の等号は、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が、いずれも同一平面上に存在するとき成立。2つ以上が一致する場合を含む。