1991 年京大後期理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

(1)

C_2 上の点$\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ 0\right), \left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$は、1 次変換 f によって、それぞれ$\left(\dfrac{a}{\sqrt{10}},\ \dfrac{c}{\sqrt{10}}\right), \left(\dfrac{b}{\sqrt{5}},\ \dfrac{d}{\sqrt{5}}\right)$に移る。

これらはC_1 上の点であるから

$$\frac{a^2}{10}+\frac{c^2}{10}-1=0,\ \frac{b^2}{5}+\frac{d^2}{5}-1=0 \qquad a^2+c^2=10,\ b^2+d^2=5$$

$a,\ b,\ c,\ d$ は自然数であり、考えられるのは、$(a,\ c)=(3,\ 1),\ (1,\ 3)$、$(b,\ d)=(2,\ 1),\ (1,\ 2)$ である。

このうち、$ad-bc>0$ となるのは　$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 2,\ 1,\ 1),\ (3,\ 1,\ 1,\ 2)$

また、C_2 上の点$(1,\ -1)$は、1 次変換 f によって、$(a-b,\ c-d)$に移る。

$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 2,\ 1,\ 1)$ のとき　$(a-b,\ c-d)=(1,\ 0)$ はC_1 上の点である。

$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 1,\ 1,\ 2)$ のとき　$(a-b,\ c-d)=(2,\ -1)$ はC_1 上の点ではない。

以上により、適するのは　$\therefore (a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 2,\ 1,\ 1)$ ……(答)

(2)

Aは逆行列A^{-1}を持つ。$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$より　$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

f の逆変換 f^{-1}が存在するので、$f(C_2)=C_1$より　$f^{-1}(C_1)=C_2$

C_1 上の点を$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと　$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta-2\sin\theta\\ -\cos\theta+3\sin\theta\end{pmatrix}$

これをC_2 の式に代入すると

$$\begin{aligned}10x^2+14xy+5y^2 &= 10(\cos\theta-2\sin\theta)^2+14(\cos\theta-2\sin\theta)(-\cos\theta+3\sin\theta)+5(-\cos\theta+3\sin\theta)^2\\ &= 10(\cos^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+4\sin^2\theta)+14(-\cos^2\theta+5\sin\theta\cos\theta-6\sin^2\theta)\\ &\quad +5(\cos^2\theta-6\sin\theta\cos\theta+9\sin^2\theta)\\ &= \cos^2\theta+\sin^2\theta=1\end{aligned}$$

したがって、任意のθ について、$(\cos\theta-2\sin\theta,\ -\cos\theta+3\sin\theta)$ はC_2 上の点である。

これが x 座標も y 座標も整数になるのは、$(\cos\theta,\ \sin\theta)=(\pm1,\ 0),\ (0,\ \pm1)$ のときのみであるから

C_2 上の点で x 座標も y 座標も整数になるのは、$(1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (-2,\ 3),\ (2,\ -3)$ の 4 個。……(答)