1991 年京大理 $\boxed{2}$

(1)

xy 平面上の任意の点を $(s,\ t)$、その f による像を $(s',\ t')$ とすると

$$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ -2s+2t \end{pmatrix} \quad 2s'+t' = 2(s-t)+(-2s+2t) = 0$$

したがって、任意の点 $(s,\ t)$ は、l 上の点に移るので、 f による全平面の像は、l である。(証明終)

(2)

P が l 上の点ではないとき、PQ は l と直交するから、PQ の傾きは $\dfrac{1}{2}$ に等しい。

$Q(s,\ -2s)$ とすると $\quad \dfrac{y+2s}{x-s} = \dfrac{1}{2} \quad 2y+4s = x-s \quad 5s = x-2y \quad \therefore s = \dfrac{x-2y}{5}$

Q の座標は $\quad \left(\dfrac{x-2y}{5},\ \dfrac{-2x+4y}{5}\right) \quad \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} x-2y \\ -2x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-y' \\ -2x'+2y' \end{pmatrix} \quad \therefore x'-y' = \dfrac{x-2y}{5}$

$$x'^2+y'^2 = x'^2+\left(x'-\frac{x-2y}{5}\right)^2 = 2x'^2-\frac{2(x-2y)}{5}x'+\frac{(x-2y)^2}{25} = 2\left(x'-\frac{x-2y}{10}\right)^2+\frac{(x-2y)^2}{50}$$

$x'^2+y'^2$ が最小になるとき $\quad x' = \dfrac{x-2y}{10} \quad y' = x'-\dfrac{x-2y}{5} = \dfrac{-x+2y}{10}$

したがって $\quad \therefore P'\left(\dfrac{x-2y}{10},\ \dfrac{-x+2y}{10}\right)$ ——①

P が l 上の点であるとき、Q は P に等しいから $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-y' \\ -2x'+2y' \end{pmatrix} \quad \therefore x'-y' = x$

$$x'^2+y'^2 = x'^2+(x'-x)^2 = 2x'^2-2xx'+x^2 = 2\left(x'-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{x^2}{2}$$

$x'^2+y'^2$ が最小になるとき $\quad x' = \dfrac{x}{2} \quad y' = x'-x = -\dfrac{x}{2} \quad \therefore P'\left(\dfrac{x}{2},\ -\dfrac{x}{2}\right)$

これは、①に $y=-2x$ を代入したものに等しい。

①は、 P が l 上の点であっても成立するから $\quad \therefore P'\left(\dfrac{x-2y}{10},\ \dfrac{-x+2y}{10}\right)$ ……(答)

(3)

g を表す行列は、$\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから

合成写像 $f\circ g\circ f$ は $\quad \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

合成写像 $g\circ f\circ g$ は $\quad \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{100}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

したがって $\quad \therefore f\circ g\circ f = f,\ g\circ f\circ g = g$ ……(答)