1991年京大理 $\boxed{4}$

$$\tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a+b}{2}\right)}=\frac{1-\cos(a+b)}{1+\cos(a+b)},\ \tan a\tan b=\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\cos(a-b)+\cos(a+b)}$$ より、

$p=\cos(a+b),\ q=\cos(a-b)$ とおくと

$0\leqq a<\frac{\pi}{4},\ 0\leqq b<\frac{\pi}{4}$ より、$0\leqq a+b<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}<a-b<\frac{\pi}{4}$ であるから　$0<p\leqq 1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}<q\leqq 1$

$$\tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)-\tan a\tan b=\frac{1-p}{1+p}-\frac{q-p}{q+p}=\frac{(1-p)(q+p)-(1+p)(q-p)}{(1+p)(q+p)}$$
$$=\frac{q+p-pq-p^2-(q-p+pq-p^2)}{(1+p)(q+p)}=\frac{2p-2pq}{(1+p)(q+p)}=\frac{2p(1-q)}{(1+p)(q+p)}\geqq 0$$

等号成立は、$q=\cos(a-b)=1$、$a=b$ のとき。

$$\frac{1}{4}(\tan a+\tan b)^2=\frac{(\sin a\cos b+\cos a\sin b)^2}{4\cos^2 a\cos^2 b}=\frac{\sin^2(a+b)}{\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}^2}=\frac{1-\cos^2(a+b)}{\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}^2}$$ より

$$\frac{1}{4}(\tan a+\tan b)^2-\tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$=\frac{1-p^2}{(p+q)^2}-\frac{1-p}{1+p}=\frac{(1-p)\{(1+p)^2-(p+q)^2\}}{(1+p)(p+q)^2}=\frac{(1-p)(1+2p+p^2-p^2-q^2-2pq)}{(1+p)(p+q)^2}$$
$$=\frac{(1-p)(1-q^2+2p-2pq)}{(1+p)(p+q)^2}=\frac{(1-p)(1-q)(1+q+2p)}{(1+p)(p+q)^2}\geqq 0$$

等号成立は、$p=\cos(a+b)=1$ または $q=\cos(a-b)=1$、結局 $a=b$ のとき。

以上により

$$\tan a\tan b\leqq\tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqq\frac{1}{4}(\tan a+\tan b)^2\quad\therefore\sqrt{\tan a\cdot\tan b}\leqq\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}(\tan a+\tan b)$$ （証明終）

等号成立条件は、両側とも $a=b$ のとき。