1991 年京大理 $\boxed{6}$

※2017. 2. 9　訂正しました。a に関する場合分けについて追記。

(1)

②の両辺を x で微分すると　$(f(x))^{-a}=\{e^{-\frac{(f(x))^2}{2}}+(f(x))^{-a}\}\cdot f'(x)$　$y=f(x)$ より

$$y^{-a}=\{e^{-\frac{y^2}{2}}+y^{-a}\}\cdot y' \quad 1=(y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1)\,y' \quad \therefore y'=\frac{1}{y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1} \quad \cdots\cdots(答)$$

また、元の式で $x=0$ とすると　$0=\int_a^{f(0)}(e^{-\frac{t^2}{2}}+t^{-a})\,dt$　$\therefore f(0)=a$　……(答)

(2)

$f'(x)=\dfrac{1}{y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1}>0$ であり、y は単調増加で、$y\geqq a>0$ であるから、$g(y)=\dfrac{1}{y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1}$ とすると

$$g'(y)=-\frac{a\,y^{a-1}e^{-\frac{y^2}{2}}+y^a(-y)e^{-\frac{y^2}{2}}}{(y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1)^2}=\frac{y^{a-1}e^{-\frac{y^2}{2}}}{(y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1)^2}(y^2-a)$$

$a<\sqrt{a}$　$0<a<1$ のとき

増減は右の通りで、$y=\sqrt{a}$ のとき極小。$g(y)$ は正の最小値 b を持つ。

y	a	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$g'(y)$		$-$	0	$+$
$g(y)$		↘		↗

$\sqrt{a}\leqq a$　$1\leqq a$ のとき

$g(y)$ は単調増加で、$y=a$ のとき正の最小値 b を持つ。

$y^a e^{-\frac{y^2}{2}}>0$ であり、$g(y)<1$ であるから、いずれにしても　$\therefore b\leqq f'(x)\leqq 1$　(証明終)

次に、$\dfrac{1}{f'(x)}-1=y^a e^{-\frac{y^2}{2}}$ であり、$f(x)\left(\dfrac{1}{f'(x)}-1\right)=y^{a+1}e^{-\frac{y^2}{2}}$　$h(y)=y^{a+1}e^{-\frac{y^2}{2}}$ とすると

$$h'(y)=(a+1)y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+y^{a+1}(-y)e^{-\frac{y^2}{2}}=y^a e^{-\frac{y^2}{2}}\left\{(a+1)-y^2\right\}$$

$a<\sqrt{a+1}$　$0<a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

増減は右の通りで、$y=\sqrt{a+1}$ のとき極大。$h(y)$ は正の最大値 c を持つ。

y	a	$\cdots$	$\sqrt{a+1}$	$\cdots$
$h'(y)$		$+$	0	$-$
$h(y)$		↗		↘

$\sqrt{a+1}\leqq a$　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\leqq a$ のとき

$h(y)$ は単調減少で、$y=a$ のとき正の最大値 c を持つ。

$y\geqq a$ であり、$h(y)>0$ であるから、いずれにしても

$\therefore 0\leqq f(x)\left(\dfrac{1}{f'(x)}-1\right)\leqq c$　(証明終)

(3)

(2)の(イ)により、$f(x)$ は単調増加かつ発散するから、$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ である。

$$\therefore \lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^a e^{-\frac{y^2}{2}}+1}=1 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)より、$f'(x)$ は、$0<a<1$ のとき $y=\sqrt{a}$ で最小となり、$1\leqq a$ のとき $y=a$ で最小となる。

$$g(\sqrt{a})=\frac{1}{(\sqrt{a})^a e^{-\frac{a}{2}}+1}=\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a}{e}}\right)^a+1} \qquad g(a)=\frac{1}{a^a e^{-\frac{a^2}{2}}+1}$$

$f'(x)$ の最小値は　$0<a<1$ のとき $\dfrac{1}{\left(\sqrt{\frac{a}{e}}\right)^a+1}$、$1\leqq a$ のとき $\dfrac{1}{a^a e^{-\frac{a^2}{2}}+1}$ ……(答)