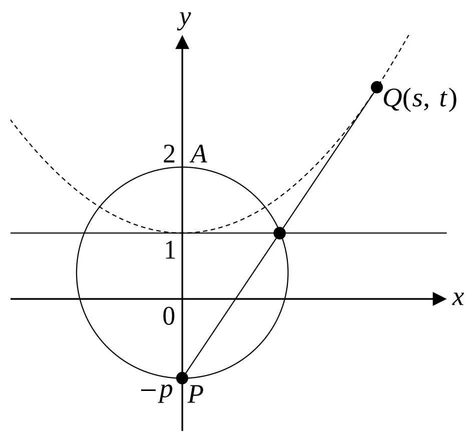
1991年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

(1)

円Cの中心の座標は$\left(0,\ \dfrac{2-p}{2}\right)$、半径は$\dfrac{2+p}{2}$で与えられる。



$x^2+\left(y-\dfrac{2-p}{2}\right)^2=\dfrac{(2+p)^2}{4}$に、$y=1$を代入すると

$x^2+\left(\dfrac{p}{2}\right)^2=\dfrac{(2+p)^2}{4}$　　$x^2=\dfrac{4+4p+p^2}{4}-\dfrac{p^2}{4}=1+p$

$x=\pm\sqrt{1+p}$

$s\geqq 0$より、PQの中点は$(\sqrt{1+p},\ 1)$であるから

$\dfrac{s}{2}=\sqrt{1+p},\ \dfrac{t-p}{2}=1$　　$\therefore s=2\sqrt{1+p},\ t=2+p$　……(答)

(2)

$s^2=4(1+p)$より　　$p=\dfrac{1}{4}s^2-1$　　$\therefore t=2+p=\dfrac{1}{4}s^2+1$

$p>0$より$s>2$であるから、Q全体が動く曲線は　$\therefore y=\dfrac{1}{4}x^2+1\ (x>2)$　……(答)

次に、直線PQの傾きは　$\dfrac{2+p+p}{2\sqrt{1+p}}=\dfrac{2(1+p)}{2\sqrt{1+p}}=\sqrt{1+p}$　　直線PQの式は　$y=\sqrt{1+p}\,x-p$

$\dfrac{1}{4}x^2+1=\sqrt{1+p}\,x-p$とすると　$x^2-4\sqrt{1+p}\,x+4(1+p)=0$　　$(x-2\sqrt{1+p})^2=0$

重解$x=2\sqrt{1+p}$を持ち、なおかつその重解は(1)で求めたsに等しい。

したがって、直線PQは、曲線$\dfrac{1}{4}x^2+1$の、点Qにおける接線である。(証明終)