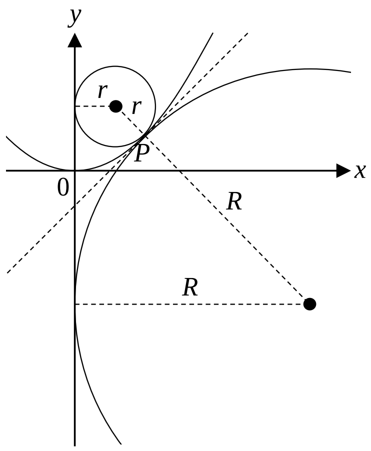
1992年京大後期理$\boxed{3}$文$\boxed{4}$共通

(1)



C_1, C_2が、$P(t, t^2)$ $(t>0)$ において $y=x^2$ に接するとき、
C_1, C_2は、P における $y=x^2$ の接線に、P において接する。
C_1, C_2の中心を結ぶ直線は、P における $y=x^2$ の法線に等しい。

法線の方程式は　$y=-\dfrac{1}{2t}(x-t)+t^2=-\dfrac{1}{2t}x+\dfrac{1}{2}+t^2$

P において $y=x^2$ に接し、y 軸にも接する円 C の中心の x 座標を、
a $(a>0)$ とすると、C の半径は a に等しい。

C の中心の座標は $\left(a, \dfrac{-a+t}{2t}+t^2\right)$ であり、P までの距離が a に等しいから

$$(a-t)^2+\left(\frac{-a+t}{2t}\right)^2=(a-t)^2\left(1+\frac{1}{4t^2}\right)=a^2 \qquad (4t^2+1)(a-t)^2=4t^2a^2$$
$$a^2-2t(4t^2+1)a+t^2(4t^2+1)=0 \quad \text{——①}$$

a に関する 2 次方程式①の 2 解のうち、小さい方が r、大きい方が R である。
$D/4=t^2(4t^2+1)^2-t^2(4t^2+1)=4t^4(4t^2+1)>0$ であるから

$$\therefore \frac{R}{r}=\frac{t(4t^2+1)+2t^2\sqrt{4t^2+1}}{t(4t^2+1)-2t^2\sqrt{4t^2+1}}=\frac{\sqrt{4t^2+1}+2t}{\sqrt{4t^2+1}-2t}=(\sqrt{4t^2+1}+2t)^2$$

$\dfrac{R}{r}$ は t に対して単調増加であり、$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{R}{r}=+\infty$ は明らかである。$t>0$ より　$\therefore \dfrac{R}{r}>1$ ……(答)

(2)

$$\frac{R}{r}=(\sqrt{4t^2+1}+2t)^2=2 \qquad \sqrt{4t^2+1}+2t=\sqrt{2} \qquad \sqrt{4t^2+1}=\sqrt{2}-2t$$

$0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の条件下で、両辺を 2 乗すると　$4t^2+1=2-4\sqrt{2}t+4t^2$　$4\sqrt{2}t=1$　$t=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

これは $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たす。求める P の座標は　$\therefore \left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}, \dfrac{1}{32}\right)$ ……(答)