1992 年京大後期理 $\boxed{4}$

(1)

$\overrightarrow{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \overrightarrow{q}=(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ とおける。 f を表す行列を、 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$f(\overrightarrow{p})=(a\cos\theta+b\sin\theta,\ c\cos\theta+d\sin\theta),\ f(\overrightarrow{q})=(-a\sin\theta+b\cos\theta,\ -c\sin\theta+d\cos\theta)$$

$$\begin{aligned} T &= f(\overrightarrow{p})\cdot\overrightarrow{p}+f(\overrightarrow{q})\cdot\overrightarrow{q} \\ &=(a\cos\theta+b\sin\theta)\cos\theta+(c\cos\theta+d\sin\theta)\sin\theta-(-a\sin\theta+b\cos\theta)\sin\theta+(-c\sin\theta+d\cos\theta)\cos\theta \\ &=(a+d)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+(b+c)\sin\theta\cos\theta-(b+c)\sin\theta\cos\theta=a+d \end{aligned}$$

したがって、T は $\overrightarrow{p},\overrightarrow{q}$ によらず、 f によって決まる値である。(証明終)

(2)

l の方程式を $y=px$、m の方程式を $y=qx$ とする。 $p\neq q$ である。 f を表す行列を、 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

l 上の任意の点 $(s,\ ps)$ が、自身に移るから $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ ps \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+pb)s \\ (c+pd)s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ ps \end{pmatrix}$

任意の s について成立するので $a+pb=1,\ c+pd=p$ ――①

m 上の任意の点 $(t,\ qt)$ が、 $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{qt}{2}\right)$ に移るから $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ qt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+qb)t \\ (c+qd)t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{t}{2} \\ \dfrac{qt}{2} \end{pmatrix}$

任意の t について成立するので $a+qb=\dfrac{1}{2},\ c+qd=\dfrac{q}{2}$ ――②

①、②を連立して解くと

$$(p-q)b=\frac{1}{2},\ (p-q)d=p-\frac{q}{2} \quad b=\frac{1}{2(p-q)},\ d=\frac{2p-q}{2(p-q)} \quad a=1-pb=1-\frac{p}{2(p-q)}=\frac{2p-2q-p}{2(p-q)}=\frac{p-2q}{2(p-q)}$$

$$\therefore T=a+d=\frac{3(p-q)}{2(p-q)}=\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$