1992年京大後期理 $\boxed{5}$

n 回の操作後の X, Y の値を、x_n, y_n と表す。n 回目の操作で取り出した玉の番号を z_n とすると

$z_n < x_{n-1}$ のとき　番号 z_n の玉が箱に戻されるので　$x_n = x_{n-1},\ y_n = y_{n-1}$

$x_{n-1} < z_n < y_{n-1}$ のとき　番号 x_{n-1} の玉が箱に戻されるので　$x_n = z_n,\ y_n = y_{n-1}$

$y_{n-1} < z_n$ のとき　番号 x_{n-1} の玉が箱に戻されるので　$x_n = y_{n-1},\ y_n = z_n$

$x_n \geqq x_{n-1},\ y_n \geqq y_{n-1}$ であるから

(1)

$y_n \leqq m$ となる確率を p_n とする。$y_{n-1} > m$ のとき、$y_n \leqq m$ となることはない。

$y_{n-1} \leqq m$ のとき、$y_n \leqq m$ となるには、n 回目の操作で m 以下の番号の玉を取り出せばよい。

そのような玉は、番号 $x_{n-1},\ y_{n-1}$ を除き $m-2$ 個あるから　$p_n = \dfrac{m-2}{N} p_{n-1}$　$\therefore p_n = p_1 \left(\dfrac{m-2}{N}\right)^{n-1}$

$p_1 = \dfrac{m-2}{N}$ であるから　$\therefore p_n = \left(\dfrac{m-2}{N}\right)^n$ ……(答)

(2)

$x_n < y_n \leqq m$ となる確率は p_n に等しい。$x_n \leqq m < y_n$ となる確率を q_n とし、q_n を求める。

$x_{n-1} > m$ のとき、$x_n \leqq m$ となることはない。

$x_{n-1} < y_{n-1} \leqq m$ のとき

n 回目の操作で $m+1$ 以上の番号の玉を取り出せば、$x_n \leqq m < y_n$ となる。$m+1$ 以上の番号の玉は $N+2-m$ 個。

$x_{n-1} \leqq m < y_{n-1}$ のとき

n 回目の操作で m 以下の番号の玉を取り出せば、$x_n \leqq m < y_n$ となる。m 以下の番号の玉は $m-1$ 個。

$$\therefore q_n = \frac{N+2-m}{N} p_{n-1} + \frac{m-1}{N} q_{n-1}$$

$p_n = \alpha^n$ とすると

$$q_n = \frac{m-1}{N} q_{n-1} + \frac{N+2-m}{N}\alpha^{n-1} \quad \frac{q_n}{\alpha^n} = \frac{m-1}{N\alpha}\cdot\frac{q_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \frac{N+2-m}{N\alpha} = \frac{m-1}{m-2}\cdot\frac{q_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \frac{N+2-m}{m-2}$$

$$\frac{q_n}{\alpha^n} + (N+2-m) = \frac{m-1}{m-2}\left\{\frac{q_{n-1}}{\alpha^{n-1}} + (N+2-m)\right\} \quad \therefore \frac{q_n}{\alpha^n} + (N+2-m) = \left(\frac{m-1}{m-2}\right)^{n-1}\left\{\frac{q_1}{\alpha} + (N+2-m)\right\}$$

$q_1 = \dfrac{N+2-m}{N}$ であるから

$$\frac{q_1}{\alpha} = \frac{N+2-m}{N\alpha} = \frac{N+2-m}{m-2} \quad \frac{q_1}{\alpha} + (N+2-m) = \left(\frac{1}{m-2}+1\right)(N+2-m) = \frac{m-1}{m-2}(N+2-m)$$

$$\frac{q_n}{\alpha^n} = (N+2-m)\left\{\left(\frac{m-1}{m-2}\right)^n - 1\right\} \quad \therefore q_n = (N+2-m)\left\{\left(\frac{m-1}{N}\right)^n - \left(\frac{m-2}{N}\right)^n\right\}$$

$x_n \leqq m$ となる確率は、$p_n + q_n$ であるから　$\therefore (N+2-m)\left(\dfrac{m-1}{N}\right)^n - (N+1-m)\left(\dfrac{m-2}{N}\right)^n$ ……(答)