1992年京大後期理 $\boxed{6}$

(1)

$a^{-1}=\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{2(-1+\sqrt{5})}{-1+5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ である。

$\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ -1\right)=(-a,\ a^{-1},\ -1)\qquad \overrightarrow{DC}=(-a,\ a^{-1},\ a^{-1}-a)=(-a,\ a^{-1},\ -1)=\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD}=\left(-1,\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=(-1,\ -a,\ a^{-1})\qquad \overrightarrow{BC}=(-a+a^{-1},\ -a,\ a^{-1})=(-1,\ -a,\ a^{-1})=\overrightarrow{AD}$

$\therefore\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{a^2+a^{-2}+1}=\sqrt{\dfrac{(6+2\sqrt{5})+(6-2\sqrt{5})+4}{4}}=\sqrt{\dfrac{16}{4}}=2$

4点 $A,\ B,\ C,\ D$ は、この順に1辺の長さ2の菱形をなしている。

次に、 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a-1-a^{-1}=0$ より　$\therefore\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$　四角形 $ABCD$ のすべての角は、直角である。

以上により、4点 $A,\ B,\ C,\ D$ は、この順に1辺の長さ2の正方形をなしている。(証明終)

(2)

平面 $x=0$ は、四角錐 $O-ABCD$ の頂点 O および底面の1つの頂点 D を通る。

辺 AB 上の点は、$0<t<1$ として、$\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-a\\a^{-1}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-at\\1+a^{-1}t\\1-t\end{pmatrix}$ と表せる。

$x=0$ のとき　$1-at=0$　$\therefore t=a^{-1}$　平面 $x=0$ と、辺 AB の交点を E とすると　$AE=2a^{-1}=-1+\sqrt{5}$

$W_1,\ W_2$ の体積比は、三角形 ADE と四角形 $EBCD$ の面積比に等しい。

三角形 ADE の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1+\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}$

四角形 $EBCD$ の面積は　$4-(-1+\sqrt{5})=5-\sqrt{5}=\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})$

求める体積比は　$\therefore W_1:W_2=1:\sqrt{5}$　……(答)