1993年京大後期文 $\boxed{4}$

多項定理により、$(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$ を展開した項は、$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を非負整数として

$$\frac{n!}{a!b!c!d!e!}x^b(x^2)^c(x^3)^d(x^4)^e=\frac{n!}{a!b!c!d!e!}x^{b+2c+3d+4e}\qquad a+b+c+d+e=n$$

$n \geqq 4$ のとき

$b+2c+3d+4e=4$ を満たすような $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ の組は

$$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)=(n-4,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0),\ (n-3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0),\ (n-2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (n-2,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0),\ (n-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1)$$

$0!=1$ として、x^4 の係数は

$$\begin{aligned}
a_4&=\frac{n!}{(n-4)!4!}+\frac{n!}{(n-3)!2!}+\frac{n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-2)!2!}+\frac{n!}{(n-1)!}\\
&=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+n(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}+n\\
&=n\left(\frac{n^3-6n^2+11n-6}{24}+\frac{n^2-3n+2}{2}+\frac{3n-3}{2}+1\right)=n\cdot\frac{n^3-6n^2+11n-6+12(n^2-3n+2)+36n-36+24}{24}\\
&=\frac{n(n^3+6n^2+11n+6)}{24}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}\quad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

※ $n=1,\ 2,\ 3$ でも成立する。