1993年京大後期文$\boxed{5}$

球面$x^2+y^2+z^2=1$上の点Aを、$A(1,\ 0,\ 0)$としても一般性を失わない。
$B(a,\ b,\ c),\ C(d,\ e,\ f)$とすると、$a^2+b^2+c^2=1,\ d^2+e^2+f^2=1$であり、
$P\left(\dfrac{a+d}{2},\ \dfrac{b+e}{2},\ \dfrac{c+f}{2}\right),\ Q\left(\dfrac{d+1}{2},\ \dfrac{e}{2},\ \dfrac{f}{2}\right),\ R\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$となる。

ここで、$OQ<\dfrac{1}{2},\ OR<\dfrac{1}{2}$とすると

$$OQ^2=\frac{(d+1)^2+e^2+f^2}{4}=\frac{d^2+e^2+f^2+2d+1}{4}=\frac{d+1}{2}<\frac{1}{4}\quad d+1<\frac{1}{2}\quad \therefore -1\leqq d<-\frac{1}{2}\ \text{——①}$$

$$OR^2=\frac{(a+1)^2+b^2+c^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2+2a+1}{4}=\frac{a+1}{2}<\frac{1}{4}\quad a+1<\frac{1}{2}\quad \therefore -1\leqq a<-\frac{1}{2}\ \text{——②}$$

①、②を辺々足すと　$\therefore -2\leqq a+d<-1$ ——③

$OP^2=\dfrac{(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2}{4}\geqq\dfrac{(a+d)^2}{4}$であり、③より$1<(a+d)^2\leqq 4$であるから

$$\frac{1}{4}<\frac{(a+d)^2}{4}\leqq 1\quad \therefore OP^2>\frac{1}{4}\quad \therefore OP>\frac{1}{2}$$

したがって、少なくとも$OP>\dfrac{1}{2}$が成立するので、題意は示された。（証明終）