1993 年京大文 $\boxed{1}$

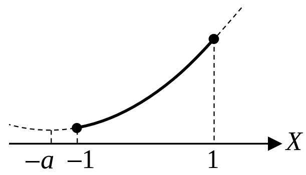
$f(x) = \sin 2x + 4a\cos x + b = 2\cos^2 x - 1 + 4a\cos x + b = 2(\cos x + a)^2 + b - 2a^2 - 1$

$X = \cos x$ とおくと $-1 \leqq X \leqq 1$ であり、$-1 \leqq X \leqq 1$ における、$F(X) = 2(X+a)^2 + b - 2a^2 - 1$ の最大・最小を考えればよい。

$-a \leqq -1 \quad 1 \leqq a$ のとき

最大値は　$F(1) = 4a + b + 1$　最小値は　$F(-1) = -4a + b + 1$

$4a + b + 1 \leqq 6,\ -4a + b + 1 \geqq -6 \quad \therefore 4a - 7 \leqq b \leqq -4a + 5$



$-1 < -a < 1 \quad -1 < a < 1$ のとき

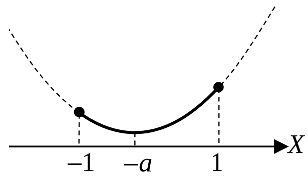
最大値は、$F(1) = 4a + b - 1$ か $F(-1) = -4a + b - 1$ の大きい方である。

$F(1) - F(-1) = 8a$ より、$a \geqq 0$ のとき $F(1) \geqq F(-1)$、$a \leqq 0$ のとき $F(1) \leqq F(-1)$

最小値は　$F(-a) = b - 2a^2 - 1$

$0 \leqq a < 1$ のとき　$4a + b + 1 \leqq 6,\ b - 2a^2 - 1 \geqq -6 \quad \therefore 2a^2 - 5 \leqq b \leqq -4a + 5$

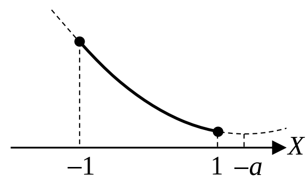
$-1 < a \leqq 0$ のとき　$-4a + b + 1 \leqq 6,\ b - 2a^2 - 1 \geqq -6 \quad \therefore 2a^2 - 5 \leqq b \leqq 4a + 5$



$1 \leqq -a \quad a \leqq -1$ のとき

最大値は　$F(-1) = -4a + b + 1$　最小値は　$F(1) = 4a + b + 1$

$-4a + b + 1 \leqq 6,\ 4a + b + 1 \geqq -6 \quad \therefore -4a - 7 \leqq b \leqq 4a + 5$



$(a,\ b)$ の範囲を図示すると、右図の通り。

境界線を含む。