1993 年京大文 $\boxed{2}$

(1)

$\overrightarrow{PE}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{3},\ \overrightarrow{PF}=\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3},\ \overrightarrow{PG}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{3},\ \overrightarrow{PH}=\dfrac{\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PA}}{3}$ であるから

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE}=\frac{\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}}{3}=\frac{\overrightarrow{AC}}{3},\ \overrightarrow{HG}=\overrightarrow{PG}-\overrightarrow{PH}=\frac{\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}}{3}=\frac{\overrightarrow{AC}}{3}\quad \therefore \overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}=\frac{\overrightarrow{AC}}{3}$$

$$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{PG}-\overrightarrow{PF}=\frac{\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}}{3}=\frac{\overrightarrow{BD}}{3},\ \overrightarrow{EH}=\overrightarrow{PH}-\overrightarrow{PE}=\frac{\overrightarrow{PD}-\overrightarrow{PB}}{3}=\frac{\overrightarrow{BD}}{3}\quad \therefore \overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}=\frac{\overrightarrow{BD}}{3}$$

したがって、四辺形 $EFGH$ は平行四辺形である。

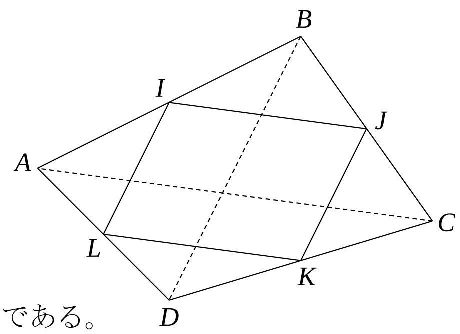
$\overrightarrow{PI}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2},\ \overrightarrow{PJ}=\dfrac{\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{2},\ \overrightarrow{PK}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2},\ \overrightarrow{PL}=\dfrac{\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PA}}{2}$ であるから、同様に、

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{2},\ \overrightarrow{JK}=\overrightarrow{IL}=\dfrac{\overrightarrow{BD}}{2}$ が示されるので、四辺形 $IJKL$ も平行四辺形である。(証明終)

上記の議論により、$\overrightarrow{EF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{FG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{JK},\ \overrightarrow{GH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{KL},\ \overrightarrow{HE}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{LI}$ であるから、題意を満たす正の定数として、

$k=\dfrac{2}{3}$ が存在する。(証明終)

(2)



平行四辺形 $EFGH$ は、平行四辺形 $IJKL$ と相似であり、相似比は $\dfrac{2}{3}$。

平行四辺形 $EFGH$ の面積は、平行四辺形 $IJKL$ の面積の $\dfrac{4}{9}$ である。

次に、凸四角形 $ABCD$ と、平行四辺形 $IJKL$ の関係を考える。

$IJ \parallel AC$、$LK \parallel AC$ であるから、$\triangle BIJ \backsim \triangle BAC$、$\triangle DLK \backsim \triangle DAC$ である。

$\triangle BIJ$ の面積は、$\triangle BAC$ の面積の $\dfrac{1}{4}$ であり、$\triangle DLK$ の面積は、$\triangle DAC$ の面積の $\dfrac{1}{4}$ である。

したがって、$\triangle BIJ$ と $\triangle DLK$ の面積の和は、凸四角形 $ABCD$ の面積の $\dfrac{1}{4}$ である。

同様に、$\triangle CJK$ と $\triangle AIL$ の面積の和も、凸四角形 $ABCD$ の面積の $\dfrac{1}{4}$ である。

以上により、平行四辺形 $IJKL$ の面積は、凸四角形 $ABCD$ の面積の $\dfrac{1}{2}$ であるから、

平行四辺形 $EFGH$ の面積は、凸四角形 $ABCD$ の面積の $\dfrac{2}{9}$ である。

求める面積比は　$\therefore 9:2$　……(答)