1993年京大後期理 3

(1)

$\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$, $\overrightarrow{OB_1}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}+\vec{a}}{3}$, $\overrightarrow{OC_1}=\dfrac{\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}}{3}$, $\overrightarrow{OD_1}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ より、$\overrightarrow{OP_1}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ とすると

$$\overrightarrow{P_1A_1}=-\frac{\vec{a}}{3},\ \overrightarrow{P_1B_1}=-\frac{\vec{b}}{3},\ \overrightarrow{P_1C_1}=-\frac{\vec{c}}{3},\ \overrightarrow{P_1D_1}=-\frac{\vec{d}}{3}$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ より　$\therefore |\overrightarrow{P_1A_1}|=|\overrightarrow{P_1B_1}|=|\overrightarrow{P_1C_1}|=|\overrightarrow{P_1D_1}|=\dfrac{1}{3}$

したがって、4点 A_1, B_1, C_1, D_1 は、P_1 を中心とした同一円周上にある。　$\therefore \overrightarrow{OP_1}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ ……(答)

(2)

$$\overrightarrow{OA_2}=\frac{\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}}{3}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}+2\vec{d}}{9}$$

同様に　$\overrightarrow{OB_2}=\dfrac{2\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}+2\vec{d}}{9}$, $\overrightarrow{OC_2}=\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}+2\vec{d}}{9}$, $\overrightarrow{OD_2}=\dfrac{2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}+3\vec{d}}{9}$

$\overrightarrow{OP_2}=\dfrac{2}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ とすると、$\overrightarrow{P_1P_2}=-\dfrac{1}{9}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ であり、

$$\overrightarrow{P_2A_2}=\frac{\vec{a}}{9},\ \overrightarrow{P_2B_2}=\frac{\vec{b}}{9},\ \overrightarrow{P_2C_2}=\frac{\vec{c}}{9},\ \overrightarrow{P_2D_2}=\frac{\vec{d}}{9}\quad \therefore |\overrightarrow{P_2A_2}|=|\overrightarrow{P_2B_2}|=|\overrightarrow{P_2C_2}|=|\overrightarrow{P_2D_2}|=\frac{1}{9}$$

$$\overrightarrow{OA_3}=\frac{\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2}+\overrightarrow{OD_2}}{3}=\frac{6\vec{a}+7\vec{b}+7\vec{c}+7\vec{d}}{27}$$

同様に　$\overrightarrow{OB_3}=\dfrac{7\vec{a}+6\vec{b}+7\vec{c}+7\vec{d}}{27}$, $\overrightarrow{OC_3}=\dfrac{7\vec{a}+7\vec{b}+6\vec{c}+7\vec{d}}{27}$, $\overrightarrow{OD_3}=\dfrac{7\vec{a}+7\vec{b}+7\vec{c}+6\vec{d}}{27}$

$\overrightarrow{OP_3}=\dfrac{7}{27}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ とすると、$\overrightarrow{P_2P_3}=\dfrac{1}{27}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ であり、

$$\overrightarrow{P_3A_3}=-\frac{\vec{a}}{27},\ \overrightarrow{P_3B_3}=-\frac{\vec{b}}{27},\ \overrightarrow{P_3C_3}=-\frac{\vec{c}}{27},\ \overrightarrow{P_3D_3}=-\frac{\vec{d}}{27}\quad \therefore |\overrightarrow{P_3A_3}|=|\overrightarrow{P_3B_3}|=|\overrightarrow{P_3C_3}|=|\overrightarrow{P_3D_3}|=\frac{1}{27}$$

$\overrightarrow{P_{n-1}P_n}=-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$ $(n\geqq 2)$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。

$n=2,\ 3$ のとき成立。

$n\leqq k$ のとき

$$\overrightarrow{P_{k-1}P_k}=-\left(-\frac{1}{3}\right)^k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})、\overrightarrow{P_kA_k}=\left(-\frac{1}{3}\right)^k\vec{a},\ \overrightarrow{P_kB_k}=\left(-\frac{1}{3}\right)^k\vec{b},\ \overrightarrow{P_kC_k}=\left(-\frac{1}{3}\right)^k\vec{c},\ \overrightarrow{P_kD_k}=\left(-\frac{1}{3}\right)^k\vec{d}$$

と仮定すると

$$\overrightarrow{OP_k}=\overrightarrow{OP_1}+\sum_{i=2}^{k}\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=\frac{1}{3}\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$k=1$でも成立。

$$\overrightarrow{OA_k}=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})+\left(-\frac{1}{3}\right)^k\vec{a}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{1+3\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}\vec{a}+\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}\vec{a}+\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$p_k=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}$とすると　$\overrightarrow{OA_k}=p_{k-1}\vec{a}+p_k(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

同様に　$\overrightarrow{OB_k}=p_{k-1}\vec{b}+p_k(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a}),\ \overrightarrow{OC_k}=p_{k-1}\vec{c}+p_k(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}),\ \overrightarrow{OD_k}=p_{k-1}\vec{d}+p_k(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

これより　$\overrightarrow{OA_{k+1}}=\dfrac{\overrightarrow{OB_k}+\overrightarrow{OC_k}+\overrightarrow{OD_k}}{3}=p_k\vec{a}+\dfrac{2p_k+p_{k-1}}{3}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$

同様に

$$\overrightarrow{OB_{k+1}}=p_k\vec{b}+\frac{2p_k+p_{k-1}}{3}(\vec{c}+\vec{d}+\vec{a}),\ \overrightarrow{OC_{k+1}}=p_k\vec{c}+\frac{2p_k+p_{k-1}}{3}(\vec{d}+\vec{a}+\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{OD_{k+1}}=p_k\vec{d}+\frac{2p_k+p_{k-1}}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$\overrightarrow{OP_{k+1}}=\dfrac{2p_k+p_{k-1}}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$とすると

$$\overrightarrow{P_kP_{k+1}}=\left(\frac{2p_k+p_{k-1}}{3}-p_k\right)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\frac{p_{k-1}-p_k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$$=\frac{1}{12}\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^k-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^k(1+3)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})=-\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$$\overrightarrow{P_{k+1}A_{k+1}}=\frac{p_k-p_{k-1}}{3}\vec{a}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\vec{a}$$

同様に　$\overrightarrow{P_{k+1}B_{k+1}}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\vec{b},\ \overrightarrow{P_{k+1}C_{k+1}}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\vec{c},\ \overrightarrow{P_{k+1}D_{k+1}}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+1}\vec{d}$

したがって、$n=k+1$でも成立するので　$\therefore \overrightarrow{P_nP_{n+1}}=-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$　……(答)

(3)

Qの位置ベクトルは、$\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{OP_n}$で与えられるので　$\therefore \overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$　……(答)