1993年京大後期理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

$$\frac{f(x)}{x^3-x}=1+\frac{ax^2+(b+1)x+c}{x^3-x}=1+\frac{(x-1)\{ax+(a+b+1)\}+a+b+c+1}{x^3-x}=1+\frac{ax+(a+b+1)}{x^2+x}+\frac{a+b+c+1}{x^3-x}$$

(1)より、$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^3-x}$が有限値に収束するためには　$a+b+c+1=0$　$\therefore c=-a-b-1$

このとき　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^3-x}=1+\frac{2a+b+1}{2}=1$　$2a+b+1=0$　$\therefore b=-2a-1$

$b=-2a-1,\ c=a$と表せるので　$f(x)=x^3+ax^2-(2a+1)x+a$　$f'(x)=3x^2+2ax-(2a+1)$

$f(0)=a,\ f(1)=0$より、lの式は、$y=-ax+a$である。

$$\int_0^1\{f(x)+ax-a\}dx=\int_0^1\{x^3+ax^2-(a+1)x\}dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{a}{3}x^3-\frac{a+1}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{1}{6}a-\frac{1}{4}$$

条件(3)より、$\left|-\frac{1}{6}a-\frac{1}{4}\right|=\left|\frac{1}{6}a+\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$であるから　$\frac{1}{6}a+\frac{1}{4}=\pm\frac{3}{4}$　$\therefore a=3,\ -6$

条件(2)より、$f'(0)=-2a-1<0$であるから

$a=3$のとき　$f'(0)=-7<0$　$a=-6$のとき　$f'(0)=11>0$　適するのは　$\therefore a=3$

以上により　$\therefore a=3,\ b=-7,\ c=3$　……(答)