1993年京大後期理$\boxed{2}$文$\boxed{2}$共通

(1)

$$f(x)=x^3-3ax \qquad f'(x)=3(x^2-a)$$

$a \leqq 0$ のとき

$f'(x) \geqq 0$ であり、 $f(x)$ は単調増加。 $y=f(x)$ と $y=t$ のグラフは、相違なる 3 個の共有点を持たない。

$a>0$ のとき

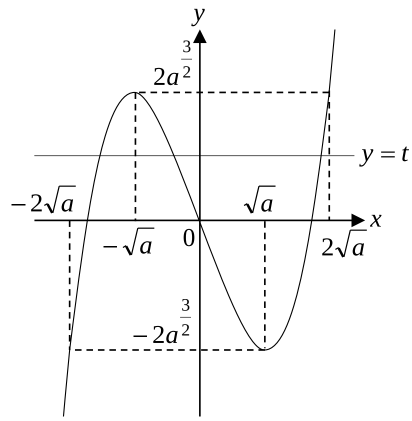
$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ であり、 $f(x)$ の増減は右の通り。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

$x=-\sqrt{a}$ のとき極大値 $2a^{\frac{3}{2}}$ 、 $x=\sqrt{a}$ のとき極小値 $-2a^{\frac{3}{2}}$ をとる。

$y=f(x)$ のグラフの概形から、求める条件は

$a>0$ かつ $-2a^{\frac{3}{2}}<t<2a^{\frac{3}{2}}$ ……(答)



(2)

$a \leqq 0$ のとき

$g(x)=f(f(x))=0$ のとき、 $f(x)=0$ であり、 $x=0$ 。

$g(x)=0$ の解は $x=0$ のみであるから、不適。

$a>0$ のとき

$g(x)=f(f(x))=0$ のとき、 $f(x)=0, \pm\sqrt{3a}$ であり、

$f(x)=0,\ f(x)=\sqrt{3a},\ f(x)=-\sqrt{3a}$ が、それぞれ相違なる 3 個の実数解を持てばよい。

$f(x)=0$ は、相違なる 3 個の実数解 $x=0, \pm\sqrt{3a}$ を持つ。

$f(x)=\sqrt{3a}$ が、相違なる 3 個の実数解を持つ条件は、(1) のグラフの概形より

$$\sqrt{3a}<2a^{\frac{3}{2}} \qquad \sqrt{3}<2a \qquad \therefore a>\frac{\sqrt{3}}{2}$$

このとき、 $f(x)=\sqrt{3a}$ の解と $f(x)=0$ の解に、一致するものはない。

対称性より、 $f(x)=-\sqrt{3a}$ が、相違なる 3 個の実数解を持つ条件も、同じである。

以上により、求める条件は　$\therefore a>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……(答)