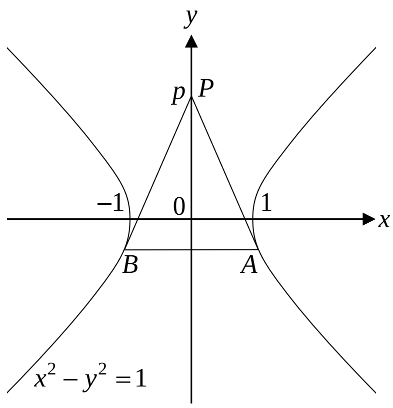
1993 年京大理 $\boxed{1}$



$A(x_0,\ y_0)$ $(x_0>0)$ とする。対称性より、$B(-x_0,\ y_0)$ となる。

$x^2-y^2=1$ を x で微分すると　$2x-2y\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$　$y\neq0$ のとき　$\therefore\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$

したがって、$y_0\neq0$ のとき、A における接線 l は

$$y=\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0 \qquad \therefore x_0x-y_0y=x_0{}^2-y_0{}^2=1$$

これが $P(0,\ p)$ を通るとき　$-y_0p=1$　$\therefore y_0=-\dfrac{1}{p}$

$$x_0{}^2=y_0{}^2+1=\frac{1+p^2}{p^2} \text{ より} \qquad \therefore x_0=\frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$$

$AB=2x_0=\dfrac{2\sqrt{1+p^2}}{p}$ であり、AB と P の距離は $p+\dfrac{1}{p}=\dfrac{1+p^2}{p}$ であるから、

$\triangle PAB$ の面積は　$S(p)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{1+p^2}}{p}\cdot\dfrac{1+p^2}{p}=\dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$　　$f(p)=\left\{S(p)\right\}^2=\dfrac{(1+p^2)^3}{p^4}$ とすると

$$f'(p)=\frac{3(1+p^2)^2\cdot2p\cdot p^4-(1+p^2)^3\cdot4p^3}{p^8}=\frac{2(1+p^2)^2\left\{3p^2-2(1+p^2)\right\}}{p^5}=\frac{2(1+p^2)^2(p^2-2)}{p^5}$$

$f(p)$ の増減は右の通り。$f(p)$ が最小のとき、$S(p)$ も最小であるから、
求める p は　$\therefore p=\sqrt{2}$　……(答)

p	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(p)$	／	$-$	0	$+$
$f(p)$	／	↘		↗