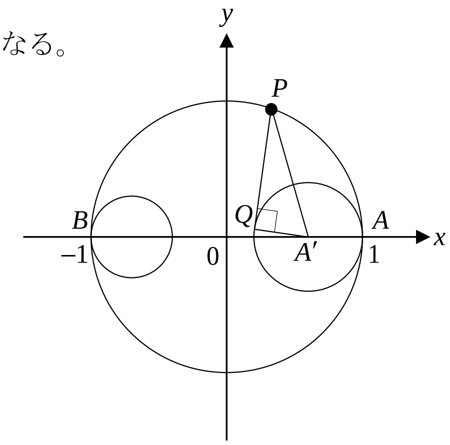
1993 年京大理 $\boxed{2}$

(1)

円 C を $x^2+y^2=1$、 $A(1,\ 0),\ B(-1,\ 0)$ としても一般性を失わない。

このとき、円 C_A の中心は $A'(1-a,\ 0)$ 、円 C_A の中心は $B'(-1+b,\ 0)$ となる。

また、 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表せる。



$\angle A'QP$ は、直角であるから　$PQ^2=PA'^2-A'Q^2=PA'^2-a^2$

$$\begin{aligned}PQ&=\sqrt{(\cos\theta-(1-a))^2+\sin^2\theta-a^2}\\&=\sqrt{-2(1-a)\cos\theta+(1-a)^2+1-a^2}\\&=\sqrt{2(1-a)(1-\cos\theta)}=2\sqrt{1-a}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$ ……(答)

(2)

(1)と同様に、$\angle B'RP$ は、直角であるから　$PR^2=PB'^2-B'R^2=PB'^2-b^2$

$$\begin{aligned}PQ&=\sqrt{(\cos\theta-(b-1))^2+\sin^2\theta-b^2}=\sqrt{-2(b-1)\cos\theta+(b-1)^2+1-b^2}\\&=\sqrt{2(1-b)(1+\cos\theta)}=2\sqrt{1-b}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}PQ+PR&=2\sqrt{1-a}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|+2\sqrt{1-b}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=2\left|\sqrt{1-a}\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{1-b}\cos\frac{\theta}{2}\right|\\&=2\sqrt{(1-a)+(1-b)}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}+\alpha\right)\right|=2\sqrt{2-a-b}\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}+\alpha\right)\right|\end{aligned}$$

ただし、$\cos\alpha=\sqrt{\dfrac{1-a}{2-a-b}},\ \sin\alpha=\sqrt{\dfrac{1-b}{2-a-b}}$ である。

これより、$PQ+PR$ の最大値は　$2\sqrt{2-a-b}$ ……(答)