1993 年京大理 $\boxed{6}$

(1)

$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore f^2=g^2=(gf)^3=i$　（証明終）

(2)

(1)より、$(gf)^3=gfgfgf=i$ であるから

両辺に右から f をかけると　$gfgfgf^2=f$　$\therefore gfgfg=f$

さらに、両辺に右から g をかけると　$gfgfg^2=fg$　$\therefore gfgf=fg$

さらに、両辺に右から f をかけると　$gfgf^2=fgf$　$\therefore gfg=fgf$

さらに、両辺に右から g をかけると　$gfg^2=fgfg$　$\therefore gf=fgfg$

さらに、両辺に右から f をかけると　$gf^2=fgfgf$　$\therefore g=fgfgf$

以上により　$\therefore g=fgfgf,\ fg=gfgf,\ gfg=fgf,\ fgfg=gf,\ gfgfg=f$　……（答）

(3)

f,g による繰り返し変換を、f,g を並べた文字列で表すとき、

f が奇数個連続している箇所は f に等しく、g が奇数個連続している箇所は g に等しい。

f または g が偶数個連続している箇所は、恒等変換 i に等しい。

f と g が交互に 4 つ並んだ箇所は、fg か gf に等しい。f と g が交互に 5 つ並んだ箇所は、f か g に等しい。

f,g による繰り返し変換のうち、相違なるものは、$i,\ f,\ g,\ fg,\ gf,\ fgf(=gfg)$ の 6 つですべてである。

gf を表す行列は、(1)より　$\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$　fg を表す行列は　$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$

fgf を表す行列は　$\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$　$f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$　$g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$　$g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$　$fg\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$　$fg\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$gf\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$　$gf\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$　$fgf\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$　$fgf\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

f,g による繰り返し変換により、Δ が移るすべての三角形の和集合は、
右図のようになる。