1993年京大理$\boxed{5}$文$\boxed{5}$共通

$2n$回中、k回偶数が出る確率は、${}_{2n}C_k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$であるから

$$p_n=({}_{2n}C_{2n}+{}_{2n}C_{2n-1}+\cdots+{}_{2n}C_{n+1}+{}_{2n}C_n)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

${}_{2n}C_{2n}+{}_{2n}C_{2n-1}+\cdots+{}_{2n}C_n+\cdots{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_0=2^{2n}$および${}_{2n}C_{2n-j}={}_{2n}C_j\ (0\leqq j\leqq n)$より

$$2({}_{2n}C_{2n}+{}_{2n}C_{2n-1}+\cdots+{}_{2n}C_{n+1})+{}_{2n}C_n=2^{2n}\qquad {}_{2n}C_{2n}+{}_{2n}C_{2n-1}+\cdots+{}_{2n}C_{n+1}=\frac{2^{2n}-{}_{2n}C_n}{2}$$

$$\therefore p_n=\left(\frac{2^{2n}-{}_{2n}C_n}{2}+{}_{2n}C_n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{2^{2n}+{}_{2n}C_n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\frac{1}{2}+\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n+1}}$$

$p_n\geqq\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}$であるとき　$\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n+1}}\geqq\frac{1}{4n}$　$n\cdot{}_{2n}C_n\geqq 2^{2n-1}$ ——①

①がすべての自然数nについて成り立つことを、数学的帰納法により示す。

$n=1$のとき成立。

$n=k$のとき　$k\cdot{}_{2k}C_k\geqq 2^{2k-1}$が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}(k+1)\cdot{}_{2(k+1)}C_{k+1}&=(k+1)\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!}=\frac{(2k+2)(2k+1)}{k+1}\frac{(2k)!}{k!k!}=2(2k+1)\cdot{}_{2k}C_k\\&=2^2\left(k+\frac{1}{2}\right){}_{2k}C_k>2^2\cdot 2^{2k-1}=2^{2k+1}\end{aligned}$$

$$\therefore (k+1)\cdot{}_{2(k+1)}C_{k+1}\geqq 2^{2(k+1)-1}$$

したがって、$n=k+1$でも成立し、①は示された。

以上により　$\therefore p_n=\frac{1}{2}+\frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n+1}}\geqq\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}$　(証明終)