1994年京大文 $\boxed{5}$

$C_1$ 上の相違なる 2 点の、$x$ 座標が一致することはない。
したがって、$C_1$ と $C_2$ が相違なる 4 つの交点を持つとき、それらの $x$ 座標はいずれも異なる。

$y=x^2-\dfrac{5}{4}$ を、$x=y^2-a$ に代入すると

$$x=\left(x^2-\frac{5}{4}\right)^2-a=x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{25}{16}-a \qquad \therefore a=x^4-\frac{5}{2}x^2-x+\frac{25}{16}$$

$y=x^4-\dfrac{5}{2}x^2-x+\dfrac{25}{16}$ と $y=a$ のグラフが、相違なる 4 つの交点を持つ条件を考えればよい。

$f(x)=x^4-\dfrac{5}{2}x^2-x+\dfrac{25}{16}$ とすると　$f'(x)=4x^3-5x-1=(x+1)(4x^2-4x-1)$

$4x^2-4x-1=0$ を解くと　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

$f(x)$ の増減は右の通り。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ |

$$f(-1)=1-\frac{5}{2}+1+\frac{25}{16}=\frac{17}{16}$$

$f(x)=\left(x^2+x-\dfrac{5}{4}\right)\left(x^2-x-\dfrac{1}{4}\right)-2x+\dfrac{5}{4}$ より

$$f\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)=-(1-\sqrt{2})+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}+\sqrt{2} \qquad f\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)=-(1+\sqrt{2})+\frac{5}{4}=\frac{1}{4}-\sqrt{2}$$

$y=f(x)$ のグラフの概形は、右図の通りであるから、

求める範囲は　$\dfrac{17}{16}<a<\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}$　……(答)