1994年京大後期理 $\boxed{2}$

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$、$O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$として　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

両辺に A^n をかけると　$A^{n+2}-(a+d)A^{n+1}+(ad-bc)A^n=O$

定義により、$A^0=E$ とおけるから、左下の成分について　$\therefore c_{n+2}-(a+d)c_{n+1}+(ad-bc)c_n=0$　（証明終）

(2)

$c_0=0$ は p で割り切れるから、$n \geqq 1$ について示せばよい。

$k \geqq 2$ とする。

(1) より、任意の自然数 k について　$c_{k+2}=(a+d)c_{k+1}-(ad-bc)c_k$

c_k と c_{k+1} が p で割り切れるとき、c_{k+2} は p で割り切れるのは明らかである。

c_{k+1} と c_{k+2} が p で割り切れるとき、c_{k+3} は p で割り切れる。

以下帰納的に、$c_{k+4}, c_{k+5}, \cdots$ は p で割り切れることが、順次わかる。

また、$c_{k+1}-(a+d)c_k=-(ad-bc)c_{k-1}$ より、

c_k と c_{k+1} が p で割り切れ、c_{k-1} は p で割り切れないと仮定する。

このとき、$ad-bc$ は p で割り切れる。

次に、$c_k-(a+d)c_{k-1}=-(ad-bc)c_{k-2}$ より、

c_k は p で割り切れるが、$a+d$ と c_{k-1} は p で割り切れないので、左辺は p で割り切れない。

ところが、$ad-bc$ は p で割り切れるので、右辺は p で割り切れる。

したがって、c_{k-1} は p で割り切れないという仮定は誤りである。

c_k と c_{k+1} が p で割り切れるとき、c_{k-1} は p で割り切れる。

c_k と c_{k-1} が p で割り切れるとき、c_{k-2} は p で割り切れる。

以下帰納的に、$c_{k-3}, \cdots, c_2, c_1$ は p で割り切れることが、順次わかる。

c_1 と c_2 が p で割り切れるとき、以下帰納的に、$c_3, c_4, \cdots$ は p で割り切れることが、順次わかる。

以上により、すべての非負整数 n について、c_n は p で割り切れる。（証明終）