1994 年京大後期理 $\boxed{3}$

$p>0,\ q>0$ とし、$P(p,\ 0),\ Q(0,\ q)$ とする。

線分 PQ の式は、$qx+py=pq$ であり、$(1,\ 1)$ との距離が 1 であるから

$$\frac{|p+q-pq|}{\sqrt{p^2+q^2}}=1 \quad |p+q-pq|^2=p^2+q^2 \quad p^2q^2+2pq-2p^2q-2pq^2=pq(pq-2p-2q+2)=0$$

$pq\neq 0$ より　$pq-2p-2q+2=0$　$\therefore (p-2)(q-2)=2$ ——①

R の座標は、Q を中心に P を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させた点に等しい。$\overrightarrow{QP}=(p,\ -q)$ より

$$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ -q\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}p+\sqrt{3}q\\ \sqrt{3}p-q\end{pmatrix} \quad \therefore \overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QR}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}p+\sqrt{3}q\\ \sqrt{3}p+q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$2a=p+\sqrt{3}q,\ 2b=\sqrt{3}p+q$ であるから、$p,\ q$ について解くと　$\therefore p=-a+\sqrt{3}b,\ q=\sqrt{3}a-b$

①に代入すると　$\therefore (-a+\sqrt{3}b-2)(\sqrt{3}a-b-2)=2$ ……(答)

（注）

$(a,\ b)$ を原点中心に $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を $(a',\ b')$ とすると、$a=\dfrac{a'-b'}{\sqrt{2}},\ b=\dfrac{a'+b'}{\sqrt{2}}$ であるから、

求めた関係式に代入すると

$$\left(-\frac{a'-b'}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\cdot\frac{a'+b'}{\sqrt{2}}-2\right)\left(\sqrt{3}\cdot\frac{a'-b'}{\sqrt{2}}-\frac{a'+b'}{\sqrt{2}}-2\right)=2$$

$$\left\{(\sqrt{3}-1)a'+(\sqrt{3}+1)b'-2\sqrt{2}\right\}\left\{(\sqrt{3}-1)a'-(\sqrt{3}+1)b'-2\sqrt{2}\right\}=4$$

$$\therefore \left\{(\sqrt{3}-1)a'-2\sqrt{2}\right\}^2-(\sqrt{3}+1)^2b'^2=4$$

R は、双曲線 $\left\{(\sqrt{3}-1)x-2\sqrt{2}\right\}^2-(\sqrt{3}+1)^2y^2=4$ を原点中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた曲線上を動く。