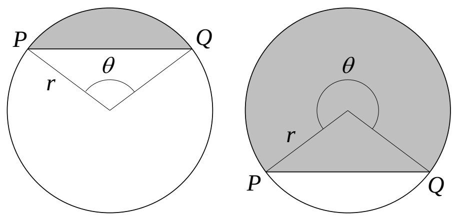
1994年京大後期理 $\boxed{5}$

$S(r)$ は、長さ1の弧 PQ と、弦 PQ で囲まれた部分の面積である。
弧 PQ に対応する中心角を、θ $(0<\theta<2\pi)$ とすると　$r\theta=1$ ——①



$0<\theta\leqq\pi$ のとき　$S(r)=\dfrac{1}{2}r^2\theta-\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta$

$\pi\leqq\theta<2\pi$ のとき　$S(r)=\dfrac{1}{2}r^2\theta+\dfrac{1}{2}r^2\sin(2\pi-\theta)=\dfrac{1}{2}r^2\theta-\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta$

結局、$0<\theta<2\pi$ において、$S(r)=\dfrac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$ が成立。

①より $r=\dfrac{1}{\theta}$ であるから　$S(r)=\dfrac{\theta-\sin\theta}{2\theta^2}$　　$f(\theta)=\dfrac{\theta-\sin\theta}{2\theta^2}$ とすると

$$f'(\theta)=\frac{(1-\cos\theta)\theta^2-(\theta-\sin\theta)\cdot2\theta}{2\theta^4}=\frac{(1-\cos\theta)\theta-2(\theta-\sin\theta)}{2\theta^3}=\frac{2\sin\theta-\theta\cos\theta-\theta}{2\theta^3}$$

さらに $g(\theta)=2\sin\theta-\theta\cos\theta-\theta$ とすると
$g'(\theta)=2\cos\theta-\cos\theta+\theta\sin\theta-1=\cos\theta+\theta\sin\theta-1$　　$g''(\theta)=-\sin\theta+\sin\theta+\theta\cos\theta=\theta\cos\theta$

$g'(\theta)$ の増減は右の通り。

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき極大、$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき極小。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$g''(\theta)$		＋	0	−	0	＋	0
$g'(\theta)$	0	↗		↘		↗	0

$g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0,\ g'(\pi)=-2<0$ より、$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ において、
$g'(\theta)=0$ となる θ が存在する。
これを α とすると、$g(\theta)$ の増減は右の通り。
$\alpha<\theta<2\pi$ において $g(\theta)$ は単調減少であり、$g(\pi)=0$ であるから
$0<\theta<\pi$ のとき $g(\theta)>0$、$\pi<\theta<2\pi$ のとき $g(\theta)<0$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	2π
$g'(\theta)$		＋	0	−	
$g(\theta)$	0	↗		↘	-4π

以上により、$f(\theta)$ の増減は右の通りであり、$\theta=\pi$ のとき極大。

求める最大値は　$f(\pi)=\dfrac{1}{2\pi}$　……(答)　このとき、$r=\dfrac{1}{\pi}$ である。

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$		＋	0	−	
$f(\theta)$		↗		↘	

※ $S(r)=\dfrac{1}{2}\left(r-r^2\sin\dfrac{1}{r}\right)$ と r の関数にしてしまうと、処理が困難である。