1994年京大後期理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

$$(|a|+|b|+|c|)^2-2(a^2+b^2+c^2)=-a^2-b^2-c^2+2|ab|+2|bc|+2|ca|$$

$c=-a-b$を代入すると

$$(|a|+|b|+|c|)^2-2(a^2+b^2+c^2)$$
$$=-a^2-b^2-(a+b)^2+2|ab|+2|a+b|(|a|+|b|)=-2a^2-2b^2+2(|ab|-ab)+2|a+b|(|a|+|b|)$$

三角不等式$|a|+|b|\geqq|a+b|$より

$$(|a|+|b|+|c|)^2-2(a^2+b^2+c^2)$$
$$\geqq-2a^2-2b^2+2(|ab|-ab)+2|a+b|^2=-2a^2-2b^2+2(|ab|-ab)+2(a^2+2ab+b^2)$$
$$=2(|ab|+ab)$$

ここで、$ab\geqq0$ならば$|ab|+ab=2ab\geqq0$、$ab<0$ならば$|ab|+ab=-ab+ab=0$であるから、
いずれにしても$|ab|+ab\geqq0$が成立する。

$$(|a|+|b|+|c|)^2-2(a^2+b^2+c^2)\geqq0 \quad \therefore(|a|+|b|+|c|)^2\geqq2(a^2+b^2+c^2)$$ （証明終）

また、等号成立条件は
$|ab|+ab=0$より　$ab\leqq0$

$|a|+|b|=|a+b|$より　$(|a|+|b|)^2=(a+b)^2$　$2|ab|=2ab$　$ab\geqq0$

したがって、$ab=0$に限られるので、$a=0$または$b=0$。
対称性より、少なくともa, b, cのうち1つ以上が0であることが条件である。……(答)