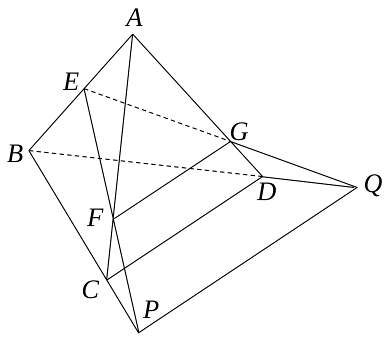
1994 年京大理 $\boxed{3}$

3 点 B, C, D を通る平面を α 、3 点 E, F, G を通る平面を β とする。
$s=t$ のとき、$AE=AF=AG$ であり、β は α と平行なるから、$s\neq t$ である。

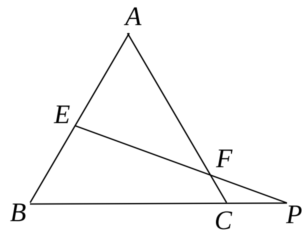
$s<t$ のとき
EF の延長が α とぶつかる点を P 、EG の延長が α とぶつかる点を Q とする。
FG は CD と平行であり、直線 PQ も CD と平行である。



正の実数 k, l を用いて、$EP=kEF,\ BP=lBC$ とおける。

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+k\overrightarrow{EF}=s\overrightarrow{AB}+k(t\overrightarrow{AC}-s\overrightarrow{AB})=s(1-k)\overrightarrow{AB}+kt\overrightarrow{AC} \quad \text{——①}$$

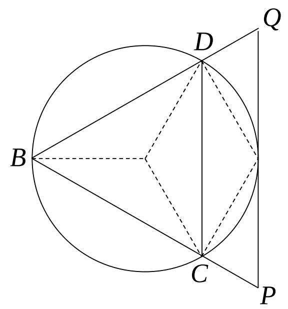
$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+l(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(1-l)\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC} \quad \text{——②}$$



①、②より　$s(1-k)=1-l,\ kt=l$　$\therefore k=\dfrac{1-s}{t-s},\ l=\dfrac{t(1-s)}{t-s}$　$\therefore BP=\dfrac{t(1-s)}{t-s}BC$

対称性より、$BQ=\dfrac{t(1-s)}{t-s}BD$ も成り立つ。

3 点 B, C, D を通る円と、PQ が接しているとき、$BC:BP=BD:BQ=3:4$ である。

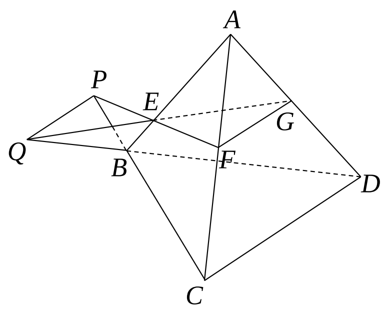


すなわち、PQ が 3 点 B, C, D を通る円と共有点を持つ条件は　$1<\dfrac{t(1-s)}{t-s}\leqq\dfrac{4}{3}$

左側の不等式より　$t-s<t(1-s)$　$s(1-t)>0$　これは成立。

右側の不等式より　$3t(1-s)\leqq 4(t-s)$　$(3s+1)t\geqq 4s$　$\therefore t\geqq\dfrac{4s}{3s+1}$

$s>t$ のとき
FE の延長が α とぶつかる点を P 、GE の延長が α とぶつかる点を Q とする。
このとき、CD と、CD と平行な直線 PQ は、点 B を挟んでいる。
PQ は、3 点 B, C, D を通る円と共有点を持つことはない。

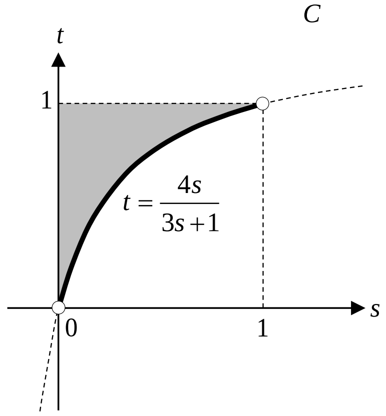


以上により、求める条件は

$0<s<1,\ 0<t<1,\ s<t$ の条件下で　$\therefore t\geqq\dfrac{4s}{3s+1}$　……(答)

$t=\dfrac{4s}{3s+1}=-\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{s+\dfrac{1}{3}}+\dfrac{4}{3}$ は双曲線の方程式であるから、

図示すると右図の通り。境界線は太線部のみ含む。



※座標設定してもよい。