1994年京大理 $\boxed{5}$

(1)

Aは、各試行で必ず札を交換し、確率$\frac{1}{3}$でBと札を交換し、確率$\frac{2}{3}$でCと札を交換する。

Bは、確率$\frac{1}{3}$でAと札を交換し、確率$\frac{2}{3}$で札を保持する。

Cは、確率$\frac{2}{3}$でAと札を交換し、確率$\frac{1}{3}$で札を保持する。

以上により　$\therefore a_n = \frac{1}{3}b_{n-1} + \frac{2}{3}c_{n-1},\ b_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1},\ c_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1}$ ……(答)

(2)

$a_n = \frac{1}{3}b_{n-1} + \frac{2}{3}c_{n-1}$ ——①　$b_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1}$ ——②　$c_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1}$ ——③

$a_n + b_n + c_n = 1$であるから

②、③より　$b_n + 2c_n = \frac{5}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}(b_{n-1} + c_{n-1}) = \frac{5}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}(1 - a_{n-1}) = a_{n-1} + \frac{2}{3}$

①より　$a_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{2}{3}c_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}$　$\therefore a_{n+2} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{9}$ ——④

④より、$m \geqq 1$のとき

$a_{2m+1} = \frac{1}{3}a_{2m-1} + \frac{2}{9}$　$a_{2m+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(a_{2m-1} - \frac{1}{3}\right)$　$a_{2m-1} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\left(a_1 - \frac{1}{3}\right)$

$a_1 = 0$であるから　$a_{2m-1} - \frac{1}{3} = -\left(\frac{1}{3}\right)^m$　$\therefore a_{2m-1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^m$

同様に　$a_{2m+2} = \frac{1}{3}a_{2m} + \frac{2}{9}$　$a_{2m+2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(a_{2m} - \frac{1}{3}\right)$　$a_{2m} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1}\left(a_2 - \frac{1}{3}\right)$

$b_1 = \frac{1}{3},\ c_1 = \frac{2}{3}$であるから　$a_2 = \frac{1}{3}b_1 + \frac{2}{3}c_1 = \frac{5}{9}$　$a_{2m} - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} \cdot \frac{2}{9} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}$　$\therefore a_{2m} = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1}$

以上により　nが奇数のとき$a_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}$、$n$が偶数のとき$a_n = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}+1}$ ……(答)