1994年京大理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

(1)

$B=\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}$とすると　$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s+u & t+v \\ 2s & 2t \end{pmatrix}$　$BA=\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s+2t & s \\ u+2v & u \end{pmatrix}$

$AB=BA$のとき　$s+u=s+2t$ ――① 　$t+v=s$ ――② 　$2s=u+2v$ ――③ 　$2t=u$ ――④

①～④より　$\therefore u=2t,\ v=s-t$　$\therefore B=\begin{pmatrix} s & t \\ 2t & s-t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+(s-t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=tA+(s-t)E$

$p=t,\ q=s-t$ととれば、題意は示された。（証明終）

(2)

(1)より、$B=pA+qE,\ C=p'A+q'E$となる実数$p,\ p',\ q,\ q'$が存在するから

$BC=(pA+qE)(p'A+q'E)=pp'A^2+(pq'+p'q)A+qq'E$

$CB=(p'A+q'E)(pA+qE)=pp'A^2+(pq'+p'q)A+qq'E$

したがって　$\therefore BC=CB$　（証明終）

(3)

$B=p\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+q & p \\ 2p & q \end{pmatrix}$とおけるので

$B^2=\begin{pmatrix} p+q & p \\ 2p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p+q & p \\ 2p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (p+q)^2+2p^2 & p(p+q)+pq \\ 2p(p+q)+2pq & 2p^2+q^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3p^2+2pq+q^2 & p(p+2q) \\ 2p(p+2q) & 2p^2+q^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$3p^2+2pq+q^2=1$ ――① 　$2p^2+q^2=1$ ――② 　$p(p+2q)=0$ ――③

③より、$p=0$または$p+2q=0$である。

$p=0$のとき、①、②より　$q^2=1$　$\therefore q=\pm 1$

$p+2q=0$のとき　$p=q=0$は不適であり、$p=-2q\neq 0$を、②に代入すると

$9q^2=1$　$q^2=\dfrac{1}{9}$　$\therefore q=\pm\dfrac{1}{3},\ p=\mp\dfrac{2}{3}$　（複号同順）

$p=-2q\neq 0$を、①に代入すると　$12q^2-4q^2+q^2=9q^2=1$　上記と同じである。

以上により　$\therefore (p,\ q)=(0,\ \pm 1),\left(\pm\dfrac{2}{3},\ \mp\dfrac{1}{3}\right)$　$\therefore B=\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \pm\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ ……(答)