1995年京大後期文 $\boxed{4}$

(1)

$n=7k+l\ (k\geqq 0,\ 0\leqq l\leqq 6)$ とすると

$n^7=(7k+l)^7=(7\text{の倍数})+l^7$

であるから、 $f(n^7)=f(l^7)$ である。 $f(n)=l$ より、 $0\leqq l\leqq 6$ について $f(l^7)=l$ が成り立てばよい。

$0^7=0,\ 1^7=1,\ 2^7=128=7\times 18+2,\ 3^7=81\times 27=(7\times 11+4)\times(7\times 4-1)=(7\text{の倍数})-4=(7\text{の倍数})+3$

$4^7=128^2=(7\times 18+2)^2=(7\text{の倍数})+4,\ 5^7=125^2\times 5=(7\times 18-1)^2\times 5=(7\text{の倍数})+5$

$6^7=2^7\times 3^7=\left\{(7\text{の倍数})+2\right\}\times\left\{(7\text{の倍数})+3\right\}=(7\text{の倍数})+6$

したがって、 $f(l^7)=l$ が成り立つので、 $f(n^7)=f(n)$ が示された。（証明終）

(2)

$4^n=(7-3)^n=(7\text{の倍数})+(-3)^n,\ 5^n=(7-2)^n=(7\text{の倍数})+(-2)^n,\ 6^n=(7-1)^n=(7\text{の倍数})+(-1)^n$ より

$$\sum_{k=1}^{7}k^n=(7\text{の倍数})+1+2^n+3^n+(-1)^n+(-2)^n+(-3)^n$$

$h(n)=1+2^n+3^n+(-1)^n+(-2)^n+(-3)^n$ とすると $\quad f\left(\sum_{k=1}^{7}k^n\right)=f(h(n))$

n が奇数のとき $\quad h(n)=0$ であるから $\quad f\left(\sum_{k=1}^{7}k^n\right)=f(0)=0 \quad \therefore g(n)=0$

n が偶数のとき $\quad h(n)=2\times(1+2^n+3^n)$

$n=2m\ (m\geqq 1)$ とすると $\quad h(n)=2\times(1+2^{2m}+3^{2m})=2\times(1+4^m+9^m)$

ここで

$4^1=4,\ 4^2=16=7\times 2+2,\ 4^3=64=7\times 9+1,\ 4^4=(7\text{の倍数})+4,\ \cdots$

$9^1=7\times 1+2,\ 9^2=81=7\times 11+4,\ 9^3=(7\text{の倍数})+36=(7\text{の倍数})+1,\ 9^4=(7\text{の倍数})+9=(7\text{の倍数})+2,\ \cdots$

4^m を7で割った余りは $\quad m=3k-2$ のとき4、$m=3k-1$ のとき2、$m=3k$ のとき1

9^m を7で割った余りは $\quad m=3k-2$ のとき2、$m=3k-1$ のとき4、$m=3k$ のとき1

これより

$m=3k-2,\ 3k-1$ のとき $\quad h(n)=2\times\left\{(7\text{の倍数})+7\right\}=(7\text{の倍数}) \quad \therefore f(h(n))=0$

$m=3k$ のとき $\quad h(n)=2\times\left\{(7\text{の倍数})+3\right\}=(7\text{の倍数})+6 \quad \therefore f(h(n))=6$

以上により、n が6の倍数のとき $g(n)=18$、n が6の倍数でないとき $g(n)=0$。

例えば $n=6$ とすれば、18点を得る。

※当てずっぽうに書いても18点をくれたのだろうか？