1995年京大文 $\boxed{3}$

$y=x^2$ を、$x^2+(y-a)^2=r^2$ に代入すると

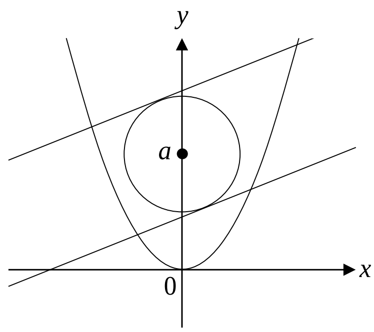
$x^2+(x^2-a)^2=x^4-(2a-1)x^2+a^2=r^2 \quad x^4-(2a-1)x^2+a^2-r^2=0$ ——①

これを x^2 に関する二次方程式と見ると

$$D=(2a-1)^2-4(a^2-r^2)=4r^2-4a+1=4\left(r+\frac{1}{2}\sqrt{4a-1}\right)\left(r-\frac{1}{2}\sqrt{4a-1}\right)$$

$0<r<\frac{1}{2}\sqrt{4a-1}$ であるから、$D<0$ であり、①は実数解を持たない。

すなわち、円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ と、放物線 $y=x^2$ は、共有点を持たない。



右図のように、この円には、傾きが同じ接線が2本存在する。

今、接線と $y=x^2$ で囲まれる図形の面積の最小値を考えるので、下側の接線について考えれば、十分である。

この円の接線の傾きを m、切片を k とすると、点 $(0,\ a)$ との距離が r より

$$\frac{|m\cdot 0-a+k|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|k-a|}{\sqrt{m^2+1}}=r \quad k-a=\pm r\sqrt{m^2+1} \quad k=a\pm r\sqrt{m^2+1}$$

切片 k のうち小さい方は $\quad \therefore k=a-r\sqrt{m^2+1}$

$x^2=mx+a-r\sqrt{m^2+1}$ の2解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると、解と係数の関係より $\quad \alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=-a+r\sqrt{m^2+1}$

接線と $y=x^2$ で囲まれる図形の面積は $\quad S=\int_\alpha^\beta (mx+a-r\sqrt{m^2+1}-x^2)dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

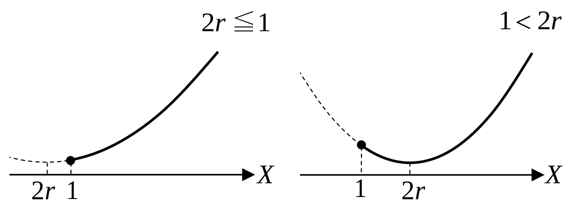
ここで $\quad (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2+4a-4r\sqrt{m^2+1}$

$X=\sqrt{m^2+1}$ とおくと $\quad (\beta-\alpha)^2=X^2-1+4a-4rX=(X-2r)^2+4a-1-4r^2$

$X \geqq 1$ の範囲で、$f(X)=(X-2r)^2+4a-1-4r^2$ とすると

$2r\leqq 1 \quad r\leqq\frac{1}{2}$ のとき $\quad f(X)$ の最小値は $\quad f(1)=4(a-r)$

このとき $\quad S=\frac{\left\{(\beta-\alpha)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{6}=\frac{2^3(a-r)^{\frac{3}{2}}}{6}=\frac{4}{3}(a-r)^{\frac{3}{2}}$



$1<2r \quad \frac{1}{2}<r$ のとき $\quad f(X)$ の最小値は $\quad f(2r)=4\left(a-\frac{1}{4}-r^2\right)$ $\quad$ このとき $\quad S=\frac{4}{3}\left(a-\frac{1}{4}-r^2\right)^{\frac{3}{2}}$

以上により $\quad 0<r\leqq\frac{1}{2}$ のとき $\frac{4}{3}(a-r)^{\frac{3}{2}}$、$\frac{1}{2}<r<\frac{1}{2}\sqrt{4a-1}$ のとき $\frac{4}{3}\left(a-\frac{1}{4}-r^2\right)^{\frac{3}{2}}$ ……(答)