1995 年京大後期理 $\boxed{3}$

条件より　$|p(-1)|=|a-b+c|\leqq 1,\ |p(1)|=|a+b+c|\leqq 1$ ——①

$b\geqq 0$ より、$p(1)-p(-1)=2b\geqq 0$ であり、$-1\leqq p(-1)\leqq p(1)\leqq 1$ であるから

　$2\geqq p(1)-p(-1)=2b\geqq 0$　$\therefore 0\leqq b\leqq 1$ ——②

$|p(0)|=|c|\leqq 1$ より　$\therefore -1\leqq c\leqq 1$ ——③

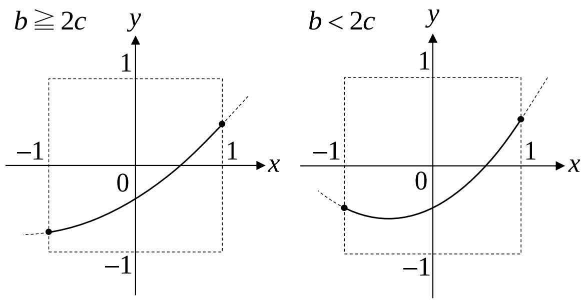
$q(-1)=p(-1),\ q(1)=p(1)$ であるから、①より　$\therefore |q(-1)|\leqq 1,\ |q(1)|\leqq 1$ ——④

$c=0$ のとき、$y=q(x)$ は直線であり、④より $-1\leqq x\leqq 1$ において $|q(x)|\leqq 1$ である。

$c>0$ のとき　$y=q(x)=c\left(x+\dfrac{b}{2c}\right)^2+a-\dfrac{b^2}{4c}$ は、下に凸の放物線である。軸 $-\dfrac{b}{2c}\leqq 0$ であるから

$-\dfrac{b}{2c}\leqq -1$、$b\geqq 2c$ のとき

　④より $-1\leqq x\leqq 1$ において $|q(x)|\leqq 1$ である。



$-1<-\dfrac{b}{2c}\leqq 0$、$b<2c$ のとき

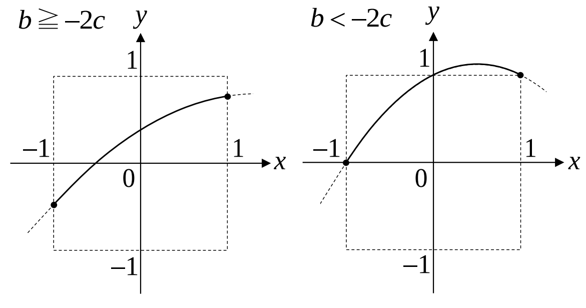
　$-1\leqq x\leqq 1$ における $q(x)$ の最小値は $m=a-\dfrac{b^2}{4c}$。

　$m>a-\dfrac{(2c)^2}{4c}=a-c$ であり、$a\geqq 0,\ 0<c\leqq 1$ より　$\therefore m>-1$

$c<0$ のとき　$y=q(x)=c\left(x+\dfrac{b}{2c}\right)^2+a-\dfrac{b^2}{4c}$ は、上に凸の放物線である。軸 $-\dfrac{b}{2c}\geqq 0$ であるから

$-\dfrac{b}{2c}\geqq 1$、$b\geqq -2c$ のとき

　④より $-1\leqq x\leqq 1$ において $|q(x)|\leqq 1$ である。



$1>-\dfrac{b}{2c}\geqq 0$、$b<-2c$ のとき

　$-1\leqq x\leqq 1$ における $q(x)$ の最大値は $M=a-\dfrac{b^2}{4c}$。

　$b,\ c$ を固定して考えると、M が最大になるのは、$q(1)=1$ のとき。

　このとき $a+b+c=1$ で、$M=1-b-c-\dfrac{b^2}{4c}=-\dfrac{1}{4c}(b+2c)^2+1$

　$0\leqq b<-2c$ より、M は $b=0$ のとき最大で、$-1\leqq c<0$ より　$\therefore M\leqq 1-c\leqq 2$

　$b=0,\ c=-1$ のとき $a=2$ であるから、$a\geqq 0$ を満たす。

　また、$p(x)=2x^2-1$ であり、$-1\leqq x\leqq 1$ において $|p(x)|\leqq 1$ を確かに満たす。

以上により、$-1\leqq x\leqq 1$ において $|q(x)|\leqq 2$ が示された。（証明終）