1995 年京大後期理 $\boxed{4}$

(1)

条件より、$\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ は平行ではなく、いずれかが零ベクトルでもないから　$\therefore x_1y_2 - y_1x_2 \neq 0$

したがって、P は逆行列 P^{-1} を持つ。(証明終)

(2)

$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & p^2+bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が成り立つとき、両辺に左から P をかけると　$\therefore BP = P\begin{pmatrix} 0 & p^2+bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$BP = \begin{pmatrix} p & b \\ c & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} px_1+bx_2 & py_1+by_2 \\ cx_1-px_2 & cy_1-py_2 \end{pmatrix}$$

$$P\begin{pmatrix} 0 & p^2+bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p^2+bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & (p^2+bc)x_1 \\ y_2 & (p^2+bc)x_2 \end{pmatrix}$$

成分を比較すると　$\begin{cases} px_1+bx_2 = y_1 \\ cx_1-px_2 = y_2 \end{cases}$　$\begin{cases} py_1+by_2 = (p^2+bc)x_1 \\ cy_1-py_2 = (p^2+bc)x_2 \end{cases}$

これを行列で表せば　$\therefore B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (p^2+bc)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、B は単位行列の実数倍ではないから、$\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ は平行ではない。

$\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であり、したがって $p^2+bc \neq 0$ であるから

$$B^{-1} = \frac{1}{-p^2-bc}\begin{pmatrix} -p & -b \\ -c & p \end{pmatrix} = \frac{1}{p^2+bc}B \quad \therefore B^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

したがって、ある零ベクトルではない $\overrightarrow{x}$ に対し、$B\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ によって $\overrightarrow{y}$ を定めれば、題意を満たす。(証明終)

(3)

$P^{-1}AP = A'$ が成り立つとき、両辺に左から P をかけると　$\therefore AP = PA'$

$$AP = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+bx_2 & ay_1+by_2 \\ cx_1+dx_2 & cy_1+dy_2 \end{pmatrix}$$

$$PA' = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'x_1+c'y_1 & b'x_1+d'y_1 \\ a'x_2+c'y_2 & b'x_2+d'y_2 \end{pmatrix}$$

成分を比較すると　$\begin{cases} ax_1+bx_2 = a'x_1+c'y_1 \\ cx_1+dx_2 = a'x_2+c'y_2 \end{cases}$　$\begin{cases} ay_1+by_2 = b'x_1+d'y_1 \\ cy_1+dy_2 = b'x_2+d'y_2 \end{cases}$

これを行列で表せば　$\therefore (A-a'E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ (A-d'E)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = b'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$(A-a'E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の両辺に $A-d'E$ をかけると　$(A-a'E)(A-d'E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c'(A-d'E)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = b'c'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\therefore \left\{A^2-(a'+d')A+(a'd'-b'c')E\right\}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ここで、ケーリー・ハミルトンの定理より　$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

$a+d=a'+d',\ ad-bc=a'd'-b'c'$ より　$\therefore A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=A^2-(a'+d')A+(a'd'-b'c')E=O$

したがって　$\therefore O\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　これは確かに成立。

同様に、$(A-d'E)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=b'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ の両辺に $A-a'E$ をかけると、$O\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ が導かれる。

したがって、$b'\neq 0,\ c'\neq 0$ であるから、ある零ベクトルではない $\overrightarrow{x}$ に対し、$\dfrac{1}{c'}(A-a'E)\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y}$ によって

$\overrightarrow{y}$ を定めれば、同時に $\dfrac{1}{b'}(A-d'E)\overrightarrow{y}=\overrightarrow{x}$ も満たす。

以上により、$(A-a'E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=c'\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ かつ $(A-d'E)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=b'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ を満たす $\overrightarrow{x},\ \overrightarrow{y}$ が存在するので、題意を満たす行列 P が存在することが示された。（証明終）