1995 年京大後期理 $\boxed{5}$

(1)

$n=1$ のとき

最初に B が A の持ち札から「1」の札を引くと、B の勝ち。

最初に B が A の持ち札から「0」の札を引くと、以後 B の勝つ確率は p_1 に等しい。

これより　$\therefore q_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p_1$　$p_1+q_1=1$ より　$\therefore p_1=\frac{1}{3},\ q_1=\frac{2}{3}$　……(答)

$n=2$ のとき

最初に B が A の持ち札から「0」以外の札を引くと、次に A が B の残り 1 枚の札を引くから、B の勝ち。

最初に B が A の持ち札から「0」の札を引くと、以後 B の勝つ確率は p_2 に等しい。

これより　$\therefore q_2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}p_2$　$p_2+q_2=1$ より　$\therefore p_2=\frac{1}{4},\ q_2=\frac{3}{4}$　……(答)

(2)

引き分けはないので、$p_n+q_n=1$ は明らかである。

$n\geqq 3$ のとき

最初に B が A の持ち札から「0」以外の札を引くと、次に A が B の持ち札を引いて再び B の番になったとき、互いの持ち札は 2 枚ずつ減っているので、以後 A の勝つ確率は p_{n-2} に等しい。

最初に B が A の持ち札から「0」の札を引くと、以後 A の勝つ確率は q_n に等しい。

$$\therefore p_n=\frac{n}{n+1}p_{n-2}+\frac{1}{n+1}q_n=\frac{n}{n+1}p_{n-2}+\frac{1}{n+1}(1-p_n)$$

$$(n+1)p_n=np_{n-2}+1-p_n \quad \therefore (n+2)p_n-np_{n-2}=1$$ (証明終)

(3)

(2) より、数列 $\{(2m+1)p_{2m-1}\},\ \{(2m+2)p_{2m}\}$ は、それぞれ公差1の等差数列である。

$p_1=\frac{1}{3}$ より　$(2m+1)p_{2m-1}=3\cdot\frac{1}{3}+1\cdot(m-1)=m$　$\therefore p_{2m-1}=\frac{m}{2m+1}$

$p_2=\frac{1}{4}$ より　$(2m+2)p_{2m}=4\cdot\frac{1}{4}+1\cdot(m-1)=m$　$\therefore p_{2m}=\frac{m}{2m+2}$

以上により　n が奇数のとき $p_n=\frac{n+1}{2(n+2)}$、n が偶数のとき $p_n=\frac{n}{2(n+2)}$　……(答)