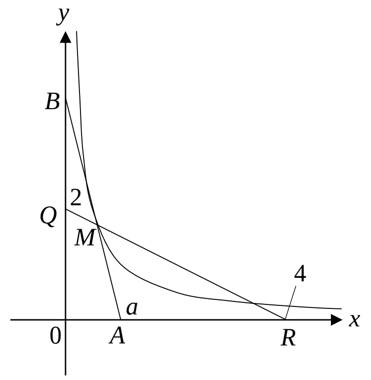
1995 年京大後期理 $\boxed{6}$

(1)

C 上の点 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)(t>0)$ における接線は　$y=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)+\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}$



これが $A(a,\ 0)$ を通るとき　$0=-\dfrac{1}{t^2}a+\dfrac{2}{t}$　$a=2t$　$\therefore t=\dfrac{a}{2}$

接線 L_a の式は　$\therefore y=-\dfrac{4}{a^2}x+\dfrac{4}{a}$

$0<a<4$ より、直線 RQ と L_a が第 1 象限で交差する条件は、

L_a の切片が 2 より大きいことであるから　$\dfrac{4}{a}>2$　$\therefore 0<a<2$ ……(答)

(2)

三角形 OAB の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot\dfrac{4}{a}=2$　三角形 ORQ の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2=4$

これより　$\therefore S_1=4-T,\ S_2=2-T$

$r=S_1+S_2=6-2T$　$\therefore T=\dfrac{6-r}{2}$　$\therefore m=S_1S_2=(4-T)(2-T)=\left(1+\dfrac{r}{2}\right)\left(-1+\dfrac{r}{2}\right)=\dfrac{r^2}{4}-1$

ここで、M の座標を求めると

$-\dfrac{1}{2}x+2=-\dfrac{4}{a^2}x+\dfrac{4}{a}$　$-a^2x+4a^2=-8x+8a$　$(8-a^2)x=8a-4a^2=4a(2-a)$

$\therefore x_0=\dfrac{4a(2-a)}{8-a^2}$　$\therefore y_0=-\dfrac{2a(2-a)}{8-a^2}+2=\dfrac{16-2a^2-4a+2a^2}{8-a^2}=\dfrac{4(4-a)}{8-a^2}$

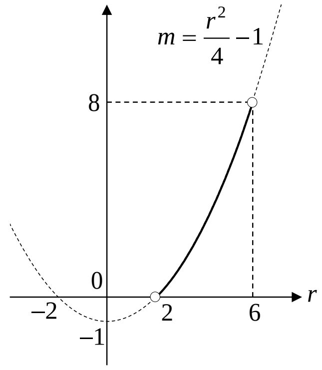
T は、三角形 OAM の面積と、三角形 OQM の面積の和であるから

$\therefore T=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot y_0+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot x_0=\dfrac{2a(4-a)}{8-a^2}+\dfrac{4a(2-a)}{8-a^2}=\dfrac{16a-6a^2}{8-a^2}$

$f(a)=\dfrac{16a-6a^2}{8-a^2}$ とすると

$$f'(a)=\frac{(16-12a)(8-a^2)+(16a-6a^2)\cdot 2a}{(8-a^2)^2}=\frac{128-16a^2-96a+12a^3+32a^2-12a^3}{(8-a^2)^2}$$

$$=\frac{16a^2-96a+128}{(8-a^2)^2}=\frac{16(a-2)(a-4)}{(8-a^2)^2}$$



$0<a<2$ のとき $f'(a)>0$ であるから、$f(a)$ は単調増加。　$\therefore 0<T<2$

したがって、$r=6-2T$ より　$\therefore 2<r<6$

$(r,\ m)$ の存在範囲は、放物線 $m=\dfrac{r^2}{4}-1$ の、$2<r<6$ の部分である。

図示すると右図の通り。