1995年京大後期理$\boxed{1}$文$\boxed{1}$共通

(1)

$x^n=(x^2+ax+b)Q(x)+r_nx+s_n=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+r_nx+s_n$ と表せるので

$\alpha^n=r_n\alpha+s_n$ ——① $\beta^n=r_n\beta+s_n$ ——②

①－②より $\alpha^n-\beta^n=r_n(\alpha-\beta)$ $\therefore r_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ したがって、$r_{n+1}=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ であるから

$r_n<r_{n+1}$ のとき $\alpha^n-\beta^n<\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}$ $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n-1<\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n-\beta$ $\therefore \beta-1<\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n(\alpha-1)$ （証明終）

(2)

(イ)より、$f(x)=x^2+ax+b$ とすると、$f(x)=0$ が相違なる2つの正の実数解を持つから

$f(0)=b>0$ 軸$-\dfrac{a}{2}>0$ $D=a^2-4b>0$ $\therefore a<0,\ b>0,\ b<\dfrac{1}{4}a^2$ ——①

(ロ)より、$\beta-1<\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n(\alpha-1)$ が、すべての n について成り立つ。

ここで、$\alpha<1$ とすると、$\beta-1<\alpha-1<0$ であり、$\dfrac{\alpha}{\beta}>1$ より $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n(\alpha-1)<\alpha-1<0$

すべての n について $\beta-1<\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n(\alpha-1)$ にはならないので、少なくとも $\alpha\geqq 1$ でなければならない。

$0<\beta<1\leqq\alpha$ または $1\leqq\beta<\alpha$ であるから

$0<\beta<1\leqq\alpha$ のとき $f(1)=1+a+b\leqq 0$ $\therefore b\leqq -a-1$ ——②

$1\leqq\beta<\alpha$ のとき $f(1)=1+a+b\geqq 0$ 軸$-\dfrac{a}{2}>1$ $\therefore a<-2,\ b\geqq -a-1$ ——③

以上①、②、③を図示すると、右図の通りであり、

$a\leqq -2$ のとき $0<b<\dfrac{1}{4}a^2$

$-2<a<-1$ のとき $0<b\leqq -a-1$

境界線は、直線 $b=-a-1$ の $-2<a<-1$ の部分のみ含み、
各交点は含まない。